


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XI
Palchetto
Num.° d' ordine 11

LES TROIS COUPS D'ESSAI GÉOMÉTRIQUES.

CONTENANT

L'ANALYSE ANGULAIRE de la quarante feptième propofition d'Euclide, fuivie de deux propofitions générales, dont elle n'eft qu'un cas particulier.

Une nouvelle propriété des POLIGONES infcrits au cercle, fuivie de la loi générale que fuivent entr'eux les mêmes poligones, & de plufieurs Théorèmes curieux, avec une nouvelle Théorie générale des figures ISOPÉRIMETRES.

Une SOLUTION ILLUSOIRE du fameux problême de la QUADRATURE du cercle, accompagnée de fix Théorèmes fort curieux, de quelques obfervations fur les fections coniques, & d'un Mémoire dans lequel on détermine, qu'elle eft la meilleure forme poffible, que l'on peut donner aux CHAMBRES DES MORTIERS, pour que leur portée foit la plus grande dont la charge eft capable, fans nuire à la durée de ces bouches à feu.

Par Mr J. G. MARSSON.







à STRASBOURG

Chez AMAND KÖNIG, Libraire.

MDCCLXX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.



A

MONSIEUR LE COMTE

LOUIS

DE COBENZL,

CHAMBELLAN DE LEURS MAJESTÉS IMPÉRIALES ROYALES APOSTOLIQUES &c. &c. &c.

MONSIEUR,

EN faiſant paroître cet Ouvrage ſous vos Auſpices, je rends l'hommage que je dois à l'étendue de

vos connoiſſances, à votre grande pénétration, & à la vivacité de votre Goût moral, qui Vous fait diſcerner ſur le champ, ce qui eſt mauvais, médiocre, bon ou excellent.

Vous aimez les ſciences certaines, celles ſur tout, où l'evidence & la certitude dominent tour-à-tour, votre eſprit s'y plait, ainſi j'oſe eſpèrer que cette petite production de ma foible capacité pourra Vous être agréable.

J'ai vû avec un plaiſir inexprimable, que l'incertain & le faux ne trouvent point entrée dans vôtre ame, que la vérité ſeule a le droit d'y pénétrer, en un mot, j'ai vû votre raiſon ſe porter avec délectation ſur les objets les plus ſublimes des connoiſſances hu-

maines, & ſaiſir avec ardeur tout ce qui peut, ou éclairer votre eſprit, ou être utile au bonheur de l'humanité, dans un âge où la raiſon de la plus part des autres hommes commence à peine de ſe faire appercevoir.

C'eſt avec ces rares qualités, que Vous entrez dans la carriere la plus importante & la plus difficile, celle de la politique. Vous allez marcher ſur les traces d'un Pere Illuſtre, qui par ſes grandes vertus & ſes rares talens, a ſçu depuis pluſieurs années meriter l'eſtime de ſes Auguſtes Souverains, & ſe faire admirer de toute l'Europe. Je vois en Vous ſon digne Succeſſeur, & je me réjouis d'avance des grandes choſes dont Vous êtes capable, tant pour le bien du ſervice du meilleur

des Césars qui vous a déja attaché à sa personne, que pour le bien de tout le genre humain.

Je suis avec un profond respect,

MONSIEUR,

Votre très-humble & très-obéissant Serviteur,

MARSSON.



PRÉFACE.

J'AVOIS à peine atteint ma douziéme année, lorſque je vis ſur la table de l'un de mes amis, des traits tracés ſur du papier, qui me fraperent d'étonnement, je lui demandai pourquoi il avoit fait ces traits? il me repondit, que c'étoit le ſujet de ſa leçon de Géometrie. Je lui demandai enſuite ce que c'étoit que cette ſcience, il me repondit, que c'eſt la connoiſſance des propriétés de l'etendüe bornée, la ſeule & unique ſcience où notre eſprit eſt alternativement conduit & éclairé par l'evidence, & la certi-

tude ; cette réponſe m'enflamma du déſir de l'étudier & de la ſavoir.

J'ENTREPRIS dès lors l'étude des Mathématiques avec une ardeur peu commune, j'y faiſois diſoit-on des progrés aſſez rapides, & mon Profeſſeur étoit content de moi, mais je ne l'étois pas moi même, parce qu'en certaines leçons je ne concevois point les choſes que les autres diſoient concevoir très bien; l'evidence me paroiſſoit très rare, & la certitude très difficile, dès ce moment je commençai à croire que la nature avoit été ingrate à mon égard, & il s'en fallu de peu que cette facheuſe reflexion ne me fit abbandonner l'étude, tant étoit grande la crainte que j'avois de ne pouvoir réuſſir.

L'AMOUR de la gloire ſoutenant mon eſprit & ranimant mon courage, me fit continuer, les reflexions que le tems & les circonſtances font naître, ont éclairci pluſieurs de mes idées, j'ai vû peu à peu de nouvelles clartés, & maintenant je vois que celles qui me ſont reſtées obſcures, le ſont auſſi pour des Savans célébres auxquels je n'oſerois me comparer.

APRÈS avoir fini mon cours complet de Mathématique, j'ai tout recommencé, & lû tous les auteurs

teurs qui en ont écrit des traités dans notre langue, je les ai lû avec la plus grande attention, j'ai comparé les différentes routes qu'ils ont pris & je suis parvenu à voir par mes comparaisons, que tous nos Sistêmes d'Elémens de Géométrie ne sont point dans l'ordre naturel, parce que chaque Auteur au lieu de suivre l'ordre des idées & des choses, prépare d'avance un échafaudage qui lui est propre, afin de parvenir à démontrer d'une manière différente de ceux qui l'ont précedé, les propositions générales & fondamentales de la Géomètrie. En un mot, j'ai vû que l'on démontre les propriétés de l'étendüe bornée, sans suivre l'ordre de la nature, & que c'est faute d'avoir suivi cet ordre sublime, que l'étude de cette Science se trouve sèche & ennuyeuse, par la raison que l'on reçoit à chaque pas que l'on y fait, le sentiment de la foiblesse de l'esprit humain.

Ces observations m'ont engagé de chercher la cause du défaut d'ordre & de simplicité de tous nos livres élémentaires, j'ai trouvé que c'est, parce qu'aucun des Auteurs n'a établi ses premiers principes sur la manière dont la Nature nous donne les premières idées de l'etenduë, cela est si vrai,

qu'il n'y en a aucun, qui ait commencé ſon ouvrage par la définition de ce mot générique, dont l'idée eſt le fondement de toute la Géomètrie. La raiſon de cette négligence eſt fort ſimple, c'eſt qu'il y a très peu de perſonnes, qui ſe donnent la peine de connoître qu'elle eſt la véritable idée que l'on doit attacher à un tel mot, dont on fait, ou dont on veut faire uſage. C'eſt cependant de cette harmonie des hommes, à attacher tous enſembles la même idée au même mot, que dépend la clarté de leurs diſcours, & c'eſt de l'arrangement de leurs idées, dans l'ordre que la Nature les fait naître, que dépend la ſimplicité & la beauté de tous les ouvrages produits par les genies ſupérieurs.

Il eſt cependant vrai, que la ſcience du Calcul, ni la Géomètrie ne pourront jamais s'étudier avec la même facilité que l'Hiſtoire, par la raiſon que l'étude des Mathématiques conſiſte à introduire de nouvelles idées dans l'eſprit de ceux qui les apprennent, & qui plus eſt, des idées qui deviennent continuellement plus compoſées, à meſure que l'on avance; l'Hiſtoire au contraire ne préſente que des faits d'actions humaines, toutes relatives au pouvoir que nous avons d'agir, & à ce que nous vo-

yons se passer sous nos yeux, parconséquent familier à tout le monde, soit pour les choses ou pour les expressions dont on fait usage. Nous sommes néamoins assurés, que les elémens peuvent devenir si clairs & si interressans, que l'on pourra avec un peu d'attention, les étudier avec plaisir, sans maître & sans beaucoup de peine; pourvû que l'on observe dans leur composition, de donner des définitions exactes, & l'ordre vraiment naturel aux vérités dont la chaine forme l'ensemble que l'on nomme science. Je sens bien que l'on dira, voilà le nœud Gordien, tout le monde sait, que les Elémens doivent avoir ces qualités, mais le difficile est de les faire, tous les hommes un peu éclairés sont capables de former des projets, mais on en trouve peu qui soyent capables de les mettre en exécution, parce qu'aucun obstacle physique ou moral ne s'oppose à l'activité prodigieuse des imaginations, au lieu qu'il s'en rencontre un très grand nombre, qui font échouer l'exécution. J'ai senti toute la force de cette difficulté, j'en ai voulu éprouver tout l'embarras, en travaillant pendant quelque tems à composer des Elémens, j'ai vû par mon travail, que les premiers principes sont ce qu'il y a de plus difficile à bien établir, parceque l'imagi-

nation ne peut point se former l'image de l'ordre admirable de la Nature, dans la chaine infinie de ses vérités nécessaires, qu'il faut absolument qu'elle se taise, pour laisser à l'intelligence la liberté de le contempler assez longtems, afin de s'en former une idée claire & distincte qui la mette en état de le devoiler aux hommes.

J'ai fait tous les efforts dont je suis capable, pour bien saisir & dévoiler cet ordre unique, dans les premiers principes de la science du Calcul & dans ceux de la Géomètrie, & quoiqu'il me paroisse que j'y ai réussi, je n'oserois assurer que ce soit parfaitement, car il est bien difficile d'avoir toujours l'esprit porté à considerer les choses comme elles sont en elles mêmes, sans y mêler quelquefois les coups d'œuil ténébreux des anciennes habitudes & des vieux préjugés, mais je crois avoir fait quelque progrés, par l'approbation que j'ai reçu de plusieurs personnes éclairées, sur les choses que je leur ai communiqué.

La contemplation de l'ordre naturel m'a fait découvrir, qu'il n'y a point deux Sciences de calcul, j'ai vû clairement que l'Arithmétique & l'Algèbre

ne ſont qu'une ſeule & même Science, que la ſeconde n'eſt autre choſe que la première élevée juſques aux abſtractions où notre intelligence la porte, qu'ainſi les opérations de la première conduiſent tout naturellement à celles de la ſeconde, que par cette raiſon, elles doivent toujours marcher d'un pas égal l'une à la ſuite de l'autre; j'ai encore vû, qu'il n'y a que deux opérations véritablement différentes, qui ſont la compoſition & la décompoſition, modifiées chacune de trois manières, la première en addition, multiplication, & élévation de puiſſance. La ſeconde, en ſouſtraction, diviſion & extraction des racines. Que c'eſt dans cet ordre que les opérations de la ſcience du calcul doivent être diſpoſées dans les Elémens, pour conduire enſuite au grand but de l'intelligence, c'eſt-à-dire au pouvoir de comparer, d'où dérive la Théorie des rapports, celle des proportions, puis enfin celles des combinaiſons.

J'AI vû de plus, que l'inſtitution des ſignes + & —, a uniquement pour but, de faire connoître les effets oppoſés des quantités les unes à l'egard des autres, & non point d'indiquer les opérations d'addition & de ſouſtraction des quantités qui en

ſont affectées, ainſi qu'on l'enſeigne dans tous les Elémens d'Algèbre. La Théorie de ces ſignes devient ſi naturelle, qu'elle ne laiſſe plus aucun doute dans l'eſprit, enſorte que le langage barbare que ſon ignorance avoit introduit, diſparoit de lui même, pour faire place à des raiſonnemens toujours accompagnés de l'évidence la plus pure.

A l'égard de ce qui concerne la Géomètrie, j'ai vû qu'elle a ſa ſource dans nos facultés ſenſitives les plus générales, par leſquelles nous recevons l'idée de l'etenduë, mais quoique cette idée ſe trouve de néceſſité abſolüe chez tous les hommes, ils ne l'ont cependant que d'une manière très confuſe, je me ſuis aſſuré de cette vérité, en demandant à pluſieurs perſonnes éclairées, comment elles conçoivent l'étendüe, mais aucune des réponſes qui m'ont été faites ne m'a paru ſatisfaiſante: J'ai donc été forcé de chercher moi-même à me rendre cette idée plus diſtincte, à cauſe que je voyois que c'eſt ſur elle que poſe tout l'édifice de cette ſcience.

JE n'ignorois pas, que d'après le célèbre LOCKE, on étoit du ſentiment qu'il n'y a que les idées compoſées qui peuvent être définies, *en expoſant*

dans l'ordre naturel les idées ſimples qui forment l'idée compoſée, que par conſéquent les idées ſimples ne peuvent point l'être. J'ai ſoupçonné que la concluſion de ce raiſonnement pourroit bien ſe trouver fauſſe, & ſur cela je me ſuis jetté dans des méditations qui m'ont conduit à connoître, que les idées ſimples ont auſſi leurs manières d'être définies, laquelle conſiſte à expoſer comment elles nous viennent par les ſens.

J'AI tout de ſuite fait l'application de cette ſorte de définition à ce que l'on nomme étendüe, & j'ai trouvé qu'on a donné ce nom, *à la quantité des ſenſations, que nous recevons de chaque objet, ſoit par le ſens de la Vüe ou par celui du Tact*, & dès l'inſtant que j'ai eu fait cette définition, j'ai ſenti que j'avois une idée claire & préciſe de ce que l'on entend par le mot d'étenduë.

L'USAGE que l'on fait de ce mot, eſt parfaitement conforme à la définition, que nous venons d'en donner, car lorſque l'on contemple le Palais d'un Monarque, on juge par la quantité des mouvemens que l'on eſt obligé de faire avec les yeux pour voir toutes ſes parties, qu'il a une grande,

médiocre ou petite étenduë. Les Militaires jugent de la même manière, qu'une Armée occupe une certaine étenduë de terrein, on dit encore que les villes de Paris & de Londres ſont d'une grande étenduë, qu'un ouvrage tel que l'Encyclopédie, qui contient nombre de volumes eſt d'une grande étenduë. Que les projets d'un Politique habile ſont d'une grande étenduë, & qu'il a des vües fort étenduës, lorſque ſes projets & ſes vües embraſſent une quantité conſiderable de choſes &c. Par où l'on voit, que le ſens propre du mot étenduë ſignifie une certaine quantité de ſenſations, & qu'au ſens figuré, il ſignifie une multitude de choſes.

Il eſt des idées ſimples qui nous viennent par tous les ſens, telles ſont les idées d'unité & de multitude ou quantité, elles dépendent l'une & l'autre des ſentimens ſucceſſifs & diverſifiés, que nous font éprouver les êtres qui nous environnent. Enfin il y a des idées qui nous viennent en même tems de nos facultés naturelles & de nos ſens, telle eſt l'idée du mouvement, j'indique ces différentes ſources des idées ſimples, pour faire connoître combien j'ai eu ſoin de remonter à l'origine de toutes nos connoiſſances.

Le

Le moyen que j'ai trouvé de définir les idées ſimples a été le plus puiſſant ſecours dont j'ai fait uſage, pour donner aux premiers principes de la Science du Calcul, & à ceux de la Géomètrie, toute l'évidence & la ſimplicité dont ils me paroiſſent ſuſceptibles, on croira ſans doute, que je n'avois qu'à pourſuivre, pour former de bons Elémens de ces deux Sciences, mais la choſe n'eſt point ainſi, arrivé aux propoſitions fondamentales, je me ſuis apperçu qu'il en manque d'eſſentielles: I a-deſſus je me ſuis demandé, ſi je ſuis vraiment Géomètre? pour ôſer entreprendre d'y ſupléer, mon amour propre auroit bien voulu trancher la queſtion, & l'on dévine bien comment, mais ma raiſon venant à mon ſecours à fait pancher la balance en faveur du doute, il ne ſuffit pas m'a t-elle dit, de comprendre les différens ouvrages qui traitent de cette Science, il faut de plus, avoir la ſagacité de faire uſage de ſes principes, & des vérités qu'elles renferme, pour découvrir de nouvelles vérités, il faut auſſi en ſavoir faire une juſte application, aux différens objets qui s'offrent à nous chaque jour, pour découvrir les choſes inconnuës, afin de reculer peu à peu les limites de l'eſprit humain.



JE ſentis alors qu'il étoit abſolument néceſſaire de mettre à l'épreuve ma foible capacité, en cherchant à découvrir quelques unes des vérités importantes qui manquent aux Elémens, afin que par le bon ou mauvais ſuccès, je connuſſe de quoi je ſuis capable. Mais mon embarras étoit de me fixer un ſujet, ſentant bien que ſi je n'avois pas un point de vüe fixe, mon eſprit ne feroit qu'errer à l'aventure, & ne pourroit arriver à rien, à moins qu'un heureux hazard ne vient à mon ſecours.

LA profonde vénération que j'avois conçu pour les Philoſophes de la Grèce, & en particulier pour le célèbre *Pythagore* me conduiſit à l'examen de ſes découvertes en Géomètrie. Celle qu'il a faite ſur le triangle rectangle fut pour moi une ſource féconde de reflexions, m'ayant paru ſingulier qu'une ſi belle propriété ne ſe trouva appartenir qu'à ce triangle. Il me vint alors dans l'eſprit, que cette propoſition ſi fameuſe du *Sage de Samos*, pourroit bien ſe trouver n'être qu'un cas particulier d'une propoſition infiniment générale, appartenant à tous les triangles poſſibles, & à chacun de leurs côtés.

JE conçus un déſir ardent de faire la découverte

de cette propoſition générale, ou de m'aſſurer qu'il n'y en a effectivement point. Quoiqu'il me parut que de l'entreprendre, fut de ma part une témérité impardonnable, je l'entrepris cependant, la prémière tentative que j'ai fait à été infructueuſe, la ſeconde m'a réuſſi au delà de toutes mes eſpérances, & c'eſt l'une & l'autre de ces tentatives qui forment le premier Coup d'Eſſai géométrique que je préſente aujourd'hui au Public. C'eſt aux Géomètres à juger du mérite de ma découverte, & du rang qu'elle doit occuper dans les Elémens de Géomètrie.

SATISFAIT, mais non enflé de mon ſuccés, je ne penſois point de faire de nouvelles recherches lorſque le mémoire ſur les poligones circonſcrits au Cercle de Mr. ZANOTTI, m'eſt tombé entre les mains, j'ai été ſurpris de ce que cet habile Profeſſeur, n'a rien fait ſur les poligones inſcrits, qui m'ont parû meriter la même attention, & devoir ſuivre une Loi analogue à celle des circonſcrits.

JE ne pû m'empècher d'entreprendre de découvrir cette loi, mais je ſentis bientôt toute la difficulté de l'entrepriſe, & comme en pareille circon-

ſtance, on tourne ſon ſujet de tous les côtés, pour chercher la route qui conduit au but que l'on ſe propoſe, l'ayant fait, j'ai découvert une propoſition aſſez ſingulière, qui m'a enſuite directement conduit à mon objet, c-a-d. à la loi que ſuivent entr'eux les poligones réguliers inſcrits, relativement à celle que ſuivent les poligones réguliers circonſcrits.

Après avoir rempli la tâche que je m'étois impoſée, mon eſprit appliqué à la contemplation des relations qu'ont entr'elles les deux familles des Poligones inſcrits & circonſcrits, n'a point pû s'arreter tout d'un coup, j'ai été contraint comme malgré moi, de former pluſieurs Théorèmes aſſez curieux, qui ſont un aſſeſſoire à l'objet principal, mais qui peuvent devenir utiles, cela eſt ſi vrai, que celui de tous qu'on auroit le moins ſoupçonné de pouvoir le devenir, m'a ſervi de moyen pour traiter d'une manière nouvelle & en grand, la Théorie de la branche géometrique des iſſopérimètres, que le célèbre Pythagore a dit-on ébauchée, mais dont l'ouvrage n'eſt point parvenu juſqu'à nous. Ce qui reſte à dire ſur cette Théorie, conſiſte en quelques problêmes interreſſans, que je compte de pu-

blier un jour pour la rendre complette ; tels ſont les matériaux qui compoſent le ſecond coup d'Eſſai géomètrique, dont le ſuccès me paroit être à-peu-près auſſi heureux que le premier.

QUAND on a réuſſi dans deux entrepriſes difficiles & epineuſes, on a le ſentiment de ſa force, & l'on ôſe en faire de nouvelles qui exigent plus de témérité. C'eſt préciſément ce qui m'eſt arrivé, me trouvant contraint de garder la chambre par un rhume qui me traccaſſoit, étant dans un pays étranger, où j'avois peu de connoiſſances, & dans un hyver auſſi déſagréable qu'il eſt poſſible, je réſolus de m'occuper à quelque choſe qui fut capable de m'amuſer, le ſujet qui ſe preſentat pour remplir mon deſſein, fut la Quadrature du Cercle. J'avoue que je ne pû m'empêcher de rire lorſque cette idée ſe préſenta, je la trouvai conforme à mon but, parce que je la trouvois ridicule, & je me mis à la chercher.

LA première penſée qui me vint, ſur la manière dont je devois m'y prendre pour réſoudre ce fameux problême, fut, qu'il étoit probable que la circonférence du cercle ſe trouve troiſième pro-

portionelle aux périmètres de deux poligones circonſcrits ou de deux inſcrits, j'ai cherché à vérifier ſi cela eſt ainſi, & chemin faiſant j'ai fait une Démonſtration qui ſemble le prouver à la rigueur, parce que le paralogiſme qu'elle renferme eſt ſi ſubtil, qu'il faut être un peu Géomètre pour pouvoir le découvrir, à l'égard de ceux qui ne le ſont pas, ils peuvent reconnoître que la ſolution eſt fauſſe, en comparant ſon réſultat avec les aproximations que nous avons du rapport de la circonférence à ſon diamètre. Je n'ai pas crû devoir dévoiler ici ce paralogiſme, pour laiſſer aux jeunes Géomètres le plaiſir de le chercher, puiſqu'ils auront par cette recherche l'avantage d'apprendre combien il eſt important de ne pas ſe preſſer à croire une propoſition vraie, quoiqu'elle ſoit accompagnée d'une démonſtration, mais qu'ils doivent faire la plus grande attention poſſible, (avant de donner leur conſentement,) pour concevoir évidemment, ſi les raiſons qui la compoſent, lient de toute néceſſité l'hypothèſe avec la concluſion, parce que c'eſt l'évidence de cette liaiſon intime, qui fait l'eſſence de toute démonſtration.

J'AI placé à la ſuite de cette ſolution illuſoire,

ſix Théorèmes qu'elle m'a fait découvrir, ils ſervent de continuation à la célèbre propoſition d'*Archimède* ſur le Cylindre circonſcrit à la ſphère, on les trouvera fort curieux & interreſſans, parce qu'ils laiſſent entrevoir que l'on peut par leur moyen, faire quelque découverte. C'eſt à des eſprits plus penetrans que le mien, qu'il appartient d'en faire l'entrepriſe, la Table des formules que j'ai fait pour ſervir à leur démonſtration pourra peut-être ſe trouver de quelque utilité pour cette recherche. Je les ai placés dans ce lieu, pour que l'effet ſoit à la ſuite de ſa cauſe, & à fin de donner occaſion à nos lecteurs, d'entrer ſans peine dans la route qui nous les a fait découvrir.

Voila ce que contient le troiſième coup d'Eſſai géométrique, par lequel je termine ce petit ouvrage; qui me paroit ſuffiſant, pour me faire connoître par l'accueil qu'il recevra, ſi mes travaux ſont de quelque prix aux yeux des connoiſſeurs, s'il arrive qu'on en faſſe quelque cas, je n'heſiterai point de publier les autres fruits de mes méditations, dont l'un eſt une Théorie nouvelle & ſimple des propriétés des lignes paralleles; un autre a pour objet, le principe exact de la meſure

des ſurfaces, & de la ſolidité des corps; celui qui le ſuit eſt une démonſtration rigoureuſe du Théorème fondamental, ſur lequel on établit tout ce qui concerne le mouvement compoſé, laquelle eſt accompagnée d'une propoſition nouvelle ſur ce ſujet, qui le rend plus évident. Enfin, le dernier eſt la découverte, que les Equations des trois ſections coniques forment entr'elles une proportion continue arithmétique, qui eſt le fondement de toutes les relations de leurs propriétés, d'où il réſulte que les ſolides décrits par les revolutions de ces trois courbes autour de leur axe, ſont auſſi en proportion continue Arithmétique.

Si c'eſt étendre les connoiſſances humaines, que de faire connoître la lenteur des progrès de l'eſprit, dans les vérités abſtraites, on en trouve ici une occaſion frappante, qui nous humilie plus qu'elle ne nous flatte, car depuis que l'Illuſtre *Pythagore* a découvert ſa propoſition, juſqu'au moment préſent que nous publions la propoſition générale dont elle n'eſt qu'un cas particulier, il s'eſt écoulé treize Siècles.

Les ſix Théorèmes qui ſervent de continuation à celui

à celui d'*Archimede* ſur le Cylindre circonſcrit à la ſphère, ſont à peu près dans le même cas, il ſemble donc, qu'il faut ce grand intervalle de temps pour paſſer d'un cas particulier à la propoſition générale, quoique toutes les propoſitions intermédiaires qui pouvoient y conduire, ayent néceſſairement paſſé dans l'eſprit de tous les hommes de genie, qui ſe ſont appliqués à cette Science, pendant que les treize Siècles ſe ſont écoulés. Quelle lenteur ! à découvrir des verités contre leſquelles les paſſions & les caprices ne luttent point, & ſur leſquelles les préjugés & les opinions n'ont aucune priſe ! il eſt aiſé de voir qu'on ne peut l'attribuer qu'à l'extrème foibleſſe de l'eſprit humain, c'eſt-à-dire, à la diſette des hommes dont l'eſprit eſt capable de faire de nouvelles combinaiſons d'idées.

COMME je n'ai aucune envie de m'attribuer les productions des autres, s'il arrive, que l'on trouve que quelques unes des choſes, qui ſont dans cet ouvrage, ont déja été publiées, ſans qu'elles ſoyent parvenuës à ma connoiſſance, je m'en déſiſte de bon cœur, pour en faire honneur aux perſonnes à qui elles appartiennent.





TABLE

des principales Matières contenuës dans cet Ouvrage.

SECOND COUP D'ESSAI GÉOMÉTRIQUE. p. 39.

TROISIÈME COUP D'ESSAI GÉOMÉTRIQUE. p. 77.



FAUTES À CORRIGER.

Page 4, *ligne* 1, au lieu de $\overline{AB}^2 \times \overline{BC}^2$, *lisez* $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

—— 7, *ligne* 16, au lieu de (Fig. 2.) *lisez* Fig. 1.)

—— 9, *ligne* 9, au lieu de ABC, *lisez* ACB.

—— 12, *ligne* 15, au lieu de $\overline{AB}^2 + AD \times AC$, *lisez* $\overline{AB}^2 = AD \times AC$.

—— *ligne* 17, au lieu de, ou bien $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = AC \times \overline{AC = CD + CF}$ *lisez* $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = AC \times \overline{AC + CD + CF}$, puis tout de ſuite au lieu de $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{AC}^2 + AC \times DF$ *lisez* $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + AC \times DF$.

—— 32, *ligne* 1, *lisez* ſi l'Angle.

—— 42, *ligne* 13, $AL \angle AF + LA$, *lisez* $AL \angle AF + LM$.

—— 49, *ligne* 7, $\sqrt{}(\overline{AB - AF} \times 2AB$, *lisez* $\sqrt{}\overline{(AB - AF) \times 2AB}$.

—— 50, *ligne* 4, ajoutez, & $GE = c$.

—— 60, *ligne* 1, au lieu de 12. 28 : : 64. *lisez* 22 : 28 : : 64:

Avis au Relieur.

Les Planches ſe mettent à la fin du Livre, & pour les faire ſortir, il faut leur coler du papier blanc.

PREMIER



PREMIER COUP
D'ESSAI GÉOMÉTRIQUE
Analyſe angulaire de la 47ᵉ. Propoſition d'EUCLIDE.

IL eſt demontré, que dans la forme triangulaire, les plus grands côtés de cette figure ont toujours vis-à-vis d'eux les plus grands angles, & reciproquement, que les plûs grands angles ont toujours vis-à-vis d'eux les plus grands côtés. Cette reciprocité de cauſe & d'effet nous a fait ſoupçonner que cette figure a ſes

propriétés également dépendantes de ses côtés & de ses angles, & qu'en général les variétés de toute étendue limitée dépendent uniquement & nécessairement de la double diversité qui a lieu tant dans le nombre & la grandeur variable des côtés, que dans les angles qu'ils forment par leurs dispositions.

Pour donner un exemple frappant de cette assertion, nous allons considérer les relations qu'ont entr'eux les quarrés des côtés d'un Triangle, en nous servant des angles, ensuite nous déterminerons ces rélations par les côtés seulement.

2.

Prennons (Fig. 1.) le triangle ABC obtus angle en B, lequel angle B est par conséquent plus grand que la somme des deux autres A & C. Au sommet B & sur AB qu'on fasse l'angle ABD égal à l'angle BCA qui est opposé au côté AB, cela fait, on aura le triangle ABD semblable au triangle ABC, parcequ'ils ont l'angle A commun, & que par la construction l'angle ABD est égal à l'angle BCA, d'où il suit que l'angle ADB est égal à l'angle ABC.

De ces deux triangles semblables, on tire la proportion AC. AB : : AB. AD, laquelle donne l'égalité $\overline{AB}^2 = AC \times AD$.

En faisant à l'extrémité B de l'autre côté BC, de l'angle obtus ABC, un angle CBF égal à l'angle BAC opposé à BC, on aura le triangle CBF semblable au triangle total ABC, parceque l'angle C leur est commun, que l'angle CBF est par la constr. égal à l'angle

BAC, d'où il résulte que l'angle CFB est aussi égal à l'angle obtus ABC.

Les deux triangles semblables ABC & BFC donnent la proportion AC. BC : : BC. CF, qui donne l'égalité $\overline{BC}^2 = AC \times CF$.

3.

Par les deux proportions AC: AB : : AB: AD, & AC: BC::BC: CF, on voit que chaque côté de l'angle obtus ABC, est en vertu de la constr. moyen proportionel avec la base entière AC, & son segment correspondant.

4.

En ajoûtant les deux égalités $\overline{AB}^2 = AC \times AD$ & $\overline{BC}^2 = AC \times CF$ on en formera cette nouvelle égalité $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = AC \times AD + AC \times CF$ qui devient en simplifiant le second membre $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = AC \times \overline{AD + CF}$, la quelle fait connoître que la somme des quarrés des deux côtés de l'angle obtus ABC vaut un rectangle qui a pour base la base AC de cet angle, & pour hauteur la somme de segmens AD, CF qui ont pour origine les extrémités de cette base

Mais le quarré $\overline{AC}^2$ de la base est égal au produit d'elle même, par la somme de tous les segmens qui la composent, c-à-d. que $\overline{AC}^2 = \overline{AC} \times \overline{AD + DF + FC}$, ou ce dernier membre surpasse $AC \times \overline{AD + CF}$ du rectangle $AC \times DF$, fait par la base AC & le segment intermédiaire DF; ce qui nous fait connoître que le quarré de la base AC de l'angle obtus ABC, surpasse toujours la somme

des quarrés $\overline{AB}^2 \times \overline{BC}^2$ des côtés de cét angle, de la valeur du rectangle fait par la baſe AC & par ſon ſegment intermédiaire DF.

5.

Quoique les quarrés ſoient entre eux dans la raiſon doublée de leurs côtés, nous pouvons cependant comparer les quarrés des trois côtés du triangle ABC à trois lignes droites, voici de quelle maniere.

Il eſt dabord évident que $\overline{AC}^2 = AC \times AC$, que $\overline{AB}^2 = AC \times AD$ & que $\overline{BC}^2 = AC \times CF$ formant de ces égalités, la proportion que voici: $\overline{AC}^2. \overline{AB}^2. \overline{BC}^2 :: AC \times AC. AC \times AD. AC \times CF$, on verra que les termes qui compoſent la ſeconde ſuite peuvent tous être diviſés par la même quantité AC, & qu'ainſi elle ſe réduit à celle-cy $\overline{AC}^2. \overline{AB}^2. \overline{BC}^2 :: AC. AD. CF$ dont la premiere ſuite contient les quarrés des côtés du triangle ABC & la ſeconde les lignes qui ont entre elles les mêmes rapports que les quarrés ont entr'eux.

6.

Les lignes BD, BF, qui font les angles ABD, CBF égaux aux angles BCA, BAC, ont auſſi leurs propriétés. La première eſt ſans doute leur égalité à laquelle on ne s'attend pas, mais qui ſe démontre facilement. Car, l'angle ABD étant égal à l'angle BCA, & l'angle BAD = l'angle CBF, le troiſieme angle BDA du premier triangle, eſt néceſſairement égal au troiſieme angle BFC du ſecond, par conſéquent leurs angles de ſuite BDF, BFD, ſont auſſi égaux, les côtés BD & BF qui leur ſont oppoſés ſont donc auſſi égaux.

7.

La feconde propriété de l'une de ces lignes égales BD, BF, c'eft d'être moyenne proportionelle entre les deux fegmens AD, CF. car les Triangles femblables ABD, CBF donnent la proportion AD. BF :: BD. FC, mais comme BF = BD, on peut dire que AD. BF ou BD :: BF ou BD. FC.

Il fuit de cette proportion continuë, que $\overline{BD}^2$ ou $\overline{BF}^2$ = AD × FC.

8.

De plus, on doit remarquer que l'angle intermédiaire DBF, eft néceffairement l'excés de l'angle obtus ABC fur la fomme des deux autres angles A & C, cela eft de néceffité abfoluë, parceque l'angle obtus d'un triangle vaut toujours plus que la fomme de fes deux autres angles.

Mais fi l'angle ABC étoit droit, il vaudroit précifément la fomme des deux autres angles A & C, il n'y auroit donc alors aucun excés de l'angle ABC fur la fomme des angles A & C, par conféquent l'angle DBF feroit nul, les deux lignes BD & BF feroient l'une fur l'autre, c'eft-à-dire que dans ce cas elles ne feront plus qu'une feule & même ligne.

9.

Soit (Fig. 2.) en effet le triangle ACB rectangle en B, la fomme de fes deux autres angles A & C fera de la valeur d'un angle droit. Donc, fi l'on fait au fommet B éxtremité du côté AB un angle ABD égal à l'angle BCA oppofé à ce côté l'autre angle CBD

ſera de lui-même égal à l'angle BAC du triangle ABC ; de ſorte que ſi on vouloit faire à l'extremité B de BC un angle CBD égal à l'angle BAD qui lui eſt oppoſé, la ligne qui le formeroit avec BC, tomberoit néceſſairement ſur BD, telle eſt la réunion des lignes BD, BF de la Fig. 1. lorſque l'angle ABC eſt droit. Ce qu'il faut encore obſerver, c'eſt que les angles BDA, BFC de la Fig. 1. étant égaux, les angles (Fig. 2.) BDA, BDC ſont égaux par la même raiſon; & par conſéquent droits, ainſi la ligne BD eſt de toute néceſſité perpendiculaire ſur AC, & de plus moyenne proportionelle entre AD & DC.

Les (Fig. 2.) triangles ABD, CBD ſont donc auſſi équiangles & ſemblables au triangle total ABC ainſi que l'ont été les triangles (Fig. 1.) ABD, CBF pour le triangle ABC, par conſéquent nous pouvons en conclure les proportions ſuivantes. AC. AB : : AB. AD, AC. BC : : BC. CD, AD. BD : : BD. DC.

De ces trois proportions on en peut tirer les trois égalités que voici $\overline{AB}^2 = AC \times AD$, $\overline{BC}^2 = AC \times CD$, $\overline{BD}^2 = AD \times DC$, que nous avons trouvées dans le (Fig. 1.) triangle obtusangle ABC.

De même, en ajoûtant les deux premières égalités, on en formera celle-cy $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = AC \times AD + AC \times CD$, ou en ſimplifiant le ſecond membre $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = AC \times \overline{AD + CD}$ & comme $AD + CD = AC$, on a $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = AC \times AC$ ou $\overline{AC}^2$, ce qui fait connoître que la ſomme des quarrés des côtés BA &

BC qui forment l'angle droit ABC vaut précifément le feul quarré de la bafe AC.

10.

Cette égalité de la fomme des quarrés des deux côtés qui forment l'angle droit du triangle rectangle, au feul quarré de la bafe, eft une fuite naturelle de ce que nous avons vû, que la fomme des quarrés des côtés qui forment l'angle obtus d'un triangle obtus-angle (Fig. 1.) ABC, eft moindre que le quarré de la bafe AC, de la valeur d'un rectangle formé de la bafe AC par le fegment DF fitué entre les lignes BD & BF, & comme dans le triangle rectangle, l'angle DBF difparoit, en reduifant les lignes égales BD, BF en une feule perpendiculaire BD, le fegment DF qui exprime l'intervale entre les extrémités D & F des lignes BD, BF devient nul, lorfque ces deux lignes viennent à n'en former qu'une, ce qui arrive lorfque la valeur de l'angle ABC devient égale à la fomme des deux autres A & C.

11.

Si l'on confidère (Fig. 2.) attentivement le triangle obtus angle ABC, il fera facile de s'appercevoir, que moins l'angle obtus ABC furpaffera la fomme de fes deux autres angles A & C, plus auffi fon excés fur leur fomme fera moindre. Or cet angle ABC furpaffe d'autant moins la fomme des deux autres, que fa valeur approche de plus prés de l'angle droit, ainfi fon excés DBF diminuë à mefure que l'angle ABC tend à l'égalité de l'angle droit, & quand

il y parvient cet excés devient nécessairement nul, ce qui arrive par la réunion des deux lignes BD & BF en une seule qui à cause de la constante égalité des angles BDA, BFC, devient perpendiculaire à la base AC, parce qu'alors ces deux angles égaux, étant des angles de suite formés par une seule ligne, sont nécessairement des angles droits.

12.

Les anciens Géomêtres, ayant nommé hypoténuse le côté opposé à l'angle droit d'un triangle rectangle, ont exprimé la propriété du No. 9. en disant que dans tout triangle rectangle, le quarré de l'hypotenuse vaut précisément la somme des quarrés de ses deux autres côtés.

13.

Nous avons vû No. 2. que le quarré de chaque côté de l'angle obtus, vaut un rectangle fait de sa base & de l'un de ses segmens. On a vû ensuite la modification qui arrive à cette propriété, lorsque l'angle est droit. Voyons maintenant ce qui arrive lorsque l'angle est aigû.

14.

Si (Fig. 3.) l'angle ABC est aigû, les deux angles A & C situés aux extrêmités de sa base AC, vaudront ensemble plus qu'un angle droit, mais cela n'empêche pas que l'angle ABC ne puisse être égal à l'un des angles A ou C de sa base, ni même qu'il ne puisse être égal à chacun d'eux en particulier. Enfin cet angle peut

peut ſe trouver plus grand que chacun des angles de ſa baſe; il peut auſſi ſe trouver plus grand que l'un, & moindre que l'autre, & enfin il peut ſe trouver moindre que l'un & l'autre.

15.

Suppoſons maintenant le triangle ACB dont l'angle ABC ſoit aigû, ſuppoſons de plus que cet angle ABC ſoit plus petit que l'angle ACB, & qu'il ſoit en même tems plus grand, que l'angle BAC, en faiſant à l'extrêmité B du côté AB, l'angle ABD égal à l'angle BCA, la ligne BD ſortira néceſſairement de l'angle ABC, à cauſe de la ſuppoſition que l'angle ABC eſt plus grand que l'angle ABC, ce qui eſt cauſe que l'angle ABD eſt plus grand que l'angle ABC. La ligne BD va donc rencontrer la baſe AC ſur ſon prolongement en un point D, de manière que le triangle ABC eſt néamoins ſemblable au triangle ABD, à cauſe que l'angle A étant commun, & l'angle ACB égal à l'angle ABD par la conſtruction, l'angle ABC eſt néceſſairement égal à l'angle BDA.

Ces deux triangles, étant ſemblables, ont les côtés oppoſés aux angles égaux proportionels, donc AC. AB :: AB. AD. d'où on tire l'égalité $\overline{AB}^2 = AC \times AD$. Faiſant enſuite à l'extrêmité B du côté BC, un angle CBF égal à l'angle BAC qui lui eſt oppoſé, la ligne BF ſera au dedans de l'angle ABC, en vertu de la ſuppoſition que l'angle ABC eſt plus grand que l'angle BAC, ainſi l'on aura un triangle CBF ſemblable au triangle ABC, par-

ceque l'angle C, leur eſt commun, & que par la conſtruction l'angle BAC eſt égal à l'angle CBF, donc le troiſième angle ABC eſt égal au troiſième BFC. Les deux triangles ABC & CBF ſont donc ſemblables, ainſi ils donnent la proportion continuë AC. BC : : BC. CF, d'où l'on tire l'égalité $\overline{BC}^2 = AC \times CF$.

Les triangles ABD & CBF étant chacun ſemblables au même triangle ABC, ſont néceſſairement ſemblables entre eux, d'ailleurs, il eſt aiſé de voir, d'après la conſtruction qu'ils ont les angles égaux chacun à chacun, car l'angle A du triangle ABD eſt égal à l'angle CBF du ſecond triangle CBF. Par la même raiſon l'angle ABD du premier triangle eſt égal à l'angle BCA du ſecond triangle; donc le troiſième angle BDA du premier triangle ABD eſt égal au troiſième angle BFC du ſecond. Donc les deux triangles donnent la proportion AD: BF : : BD. CF, mais les angles BDF & BFC étant égaux, on à BF = BD, transpoſant dans la proportion précedente pour BD ſa valeur BF, elle deviendra, AD. BF : : BF. CF, laquelle montre que BF eſt encore moyenne proportionelle entre les deux ſegmens AD & CF, coupés par les lignes BF & BD qui forment les angles de la conſtruction, d'où il ſuit que $\overline{BF}^2 = AD \times CF$.

16.

Si l'angle (Fig. 4.) ABC eſt moins grand, que chacun des angles A & C de la baſe, il eſt clair qu'en faiſant l'angle ABD égal à l'angle BCA, puis l'angle CBF égal à l'angle BAC, qu'on

aura deux triangles ABD, CBF semblables chacun au triangle ABC, & de plus, semblables entr'eux, ce qui donne les trois proportions continuës que voici, AD. AB : : AB. AC, & CF. CB : : CB. CA, & AD. BF : : BD. CF, mais à cause de l'égalité des angles BDF, BFD, on à BF = BD, ainsi la dernière proportion devient AD. BF : : BF. CF, proportion continuë, qui est la même que nous ont donné les triangles obtus-angle & rectangle, ainsi elle appartient à tous les triangles possibles.

17.

Des trois proportions que le triangle ABC vient de donner, on en tire les trois égalités que voici. $\overline{AB}^2 = AD \times AC$, $\overline{CB}^2 = CF \times AC$ & enfin $\overline{BF}^2 = AD \times CF$ qui sont précisément les mêmes que celles du triangle obtus-angle & du triangle rectangle.

En ajoutant les deux prémières égalités on en forme celle-cy $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = AD \times AC + CF \times AC$ ou $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = AC \times \overline{AD + CF}$, or $AD = AC + CD$, & $CF = AC + AF$, donc $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = AC \times (AC + CD + AC + AF)$, ou bien $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = AC \times AC + AC \times (AC + CD + AF)$, ou bien encore $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + AC \times DF$, (parceque $AC + CD + AF = DF$.) égalité qui fait connoître que la somme des quarrés des deux côtés de l'angle aigû ABC surpasse le quarré de la base AC, précisément de la valeur du rectangle fait de la base AC, par DF distance des deux lignes BF & BD.

18.

De tout ce que nous avons vû dans les paragraphes 14. 15. 16. il ſuit naturellement, que le quarré du côté d'un triangle eſt plus grand, égal ou moindre que la ſomme des quarrés des deux autres côtés, ſuivant que l'angle oppoſé à ce côté eſt plus grand, égal ou moindre, que la ſomme des deux autres angles, & l'on voit même par nos démonſtrations que les angles ſont la cauſe éfficiente de ce qui arrive aux côtés.

19.

Si l'angle ABC eſt moindre que chacun des deux autres A & C, les deux lignes BD & BF qui font les angles ABD, CBF, égaux chacun à chacun aux deux angles BCA, BAC, ſortiront néceſſairement de l'angle ABC & parconſéquent ne rencontreront la baſe AC que dans ſes prolongemens, mais on n'en aura pas moins les mêmes rapports que cy-devant, ainſi que les trois proportions continuës AD. AB : : AB. AC, & CF. CB : : CB. AC, & AD. BF : : BF. CF, qui donnent les trois égalités $\overline{AB}^2 + AD \times AC$, $\overline{CB}^2 = CF \times AC$, $\overline{BF}^2 = AD \times CF$, dont les deux premières donnent $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = AC \times \overline{AD + CF}$, ou bien $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = AC \times \overline{AC = CD + CF}$, ou bien enfin $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{AC}^2 + AC \times DF$, par ou l'on voit encore, que la ſomme des quarrés de deux côtés de l'angle aigû, qui ſe trouve moindre que chacun des deux au-

tres, furpaffe le quarré de fa bafe, d'un rectangle fait de cette même bafe par la diftance DF qui fe trouve entre les lignes égales BD & BF.

20.

Lorfque les deux lignes BD & BF fe réuniffent, pour ne former plus qu'une feule & même ligne, leur diftance FD devient nulle, & alors le rectangle de AC x FD eft nul, ce qui fait connoitre que dans ce cas, la fomme des quarrés des côtés AB & CB ne furpaffe point le quarré de la bafe AC, mais qu'elle lui eft parfaitement égale, ce qui ne peut arriver, que quand l'angle ABC eft droit. Voilà comment la propriété de l'excés des triangles accutangles, conduit tout naturellement à celle du triangle rectangle, comme l'on y a été conduit par le défaut du triangle obtus-angle.

21.

Puifque (Fig. 5.) les lignes BF & BD font égales, fi l'on abaiffe du fommet B la perpendiculaire BG fur la bafe AC, elle divifera néceffairement en deux parties égales en G la diftance FD, de forte que l'excés de la fomme des quarrés $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$ furpaffera le quarré $\overline{AC}^2$ d'un rectangle qui auroit pour bafe AC & pour hauteur 2 FG.

22.

On peut, (Fig. 6.) par la conftruction, dont nous avons fait

uſage, trouver une troiſième proportionelle à deux lignes données AD & DE qui forment une ſeule ligne droite AE, voici comment.

Formez ſur la ſeconde DE un triangle équilateral DEB, puis de A en B tirez AB, faites enſuite à l'extrêmité B de BE un angle EBC égal à l'angle BAD, par une ligne BC qui ira rencontrer le prolongement de AE en C, & l'on aura EC pour troiſième proportionelle demandée.

Car a cauſe de l'angle BDA égal à l'angle BEC, & de l'angle BAD égal à l'angle EBC par la conſtruction, les deux triangles ABD, BEC, ſont ſemblables, ainſi on a la proportion continuë AD. BE : : BD. EC, mais BE = BD = DE, donc en transpoſant pour BE & BD leur égale DE, on aura AD. DE : : DE. EC, C, Q, F, D.

23.

Voilà en quoi conſiſte toute l'analyſe angulaire de cette célébre propoſition attribuée au grand Philoſophe Pithagore. Paſſons maintenant à ſon examen, dans la généralité d'un Théorême qui appartient à tous les triangles poſſibles, dont elle n'eſt qu'un cas particulier. L'on y verra avec ſatisfaction que nous avons infiniment ſurpaſſé, non ſeulement ce grand homme, mais encore tous les Géomêtres qui ont cherché des nouvelles démonſtrations à ſa découverte.

ANALYSE

*de la 47e. Propofition d'*EUCLIDE *comprife dans celle du Théorême que voici, relativement aux côtés d'un triangle quelconque.*

Théorême.

24.

DANS tout triangle, le quarré de l'un de fes côtés, vaut précifément le quarré d'un fecond côté, plus ou moins le rectangle fait par le troifième côté, & par le fegment fait fur lui, compris entre le fommet du triangle qui fe trouve oppofé au fecond côté, & le point de fection que fait le fecond côté, lorfqu'on le fait tourner autour de fon extrémité oppofée au troifième côté.

C'eft-à-dire, que fi l'on prend (Fig. 7, 8, 9, 10.) AB pour premier côté, & BC pour fecond côté du triangle ABC, qu'enfuite l'on faffe tourner le fecond côté BC autour de fon extrémité B, par laquelle il joint le premier, pour que fon autre extrémité C en tournant autour du point B, coupe en quelque point D le troifième côté AC prolongé s'il eft néceffaire. Je dis, que fi le premier côté AB, eft plus grand que le fecond BC, qu'alors l'on aura l'égalité $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + AC \times AD$, & que fi le premier côté AB, eft au contraire moins grand que le fecond BC (Fig. 10.) que l'on aura l'égalité $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - AC \times AD$.

Le premier cas renferme trois circonſtances, qui conſiſtent en ce que l'angle ACB oppoſé au premier côté AB, (Fig. 7.) peut également ſe trouver aigû, droit, ou obtus. Lorſque cet angle eſt aigû, le point de ſection D fait par l'extrémité C, du ſecond côté BC, en tournant autour de ſon autre extrémité B, ſe trouve néceſſairement entre les extremités A & C du troiſième côté AC. Lorſque cet angle eſt droit, le point de ſection D, eſt néceſſairement le même que (Fig. 8.) le point C de jonction du ſecond côté BC avec le troiſième côté AC. Enfin, lorſque l'angle ACB eſt obtus, (Fig. 9.) le point de ſection D tombe néceſſairement ſur le prolongement du troiſième côté AC fait à ſon extremité C.

Pour démontrer le premier cas de ce Théorême dans ſes trois circonſtances, du point de jonction B du premier & ſecond côté, pris pour centre, & le ſecond côté BC étant pris pour rayon, décrivez la circonférence CEF, puis prolongez le premier côté AB, juſqu'à ce qu'il rencontre la circonférence décrite en F, enſuite, du centre B tirez au point de ſection D le rayon BD. Voici ſucceſſivement les démonſtrations de ces trois circonſtances.

DEMONSTRATION.

Par la propriété des ſecantes (Fig. 7.) on a la proportion AF. AC : : AD. AE. mais les rayons BF, BD, & BC étant égaux, on a les égalités AF = AB + BF = AB + BC. De plus AE = AB — BE = AB — BC, ainſi en tranſpoſant on peut mettre

mettre dans la proportion précédente, pour la ligne AF, son équivalent AB+BC, pour AE sa valeur AB—BC, ce qui lui donnera cette forme, AB+BC. AC : : AD. AB—BC, de laquelle faisant le produit des extrêmes & celui des moyens, on aura, $\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=$ AC×AD, de la quelle on tire l'égalité $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+AC\times AD$, qui est précisément celle qu'il falloit démontrer.

25.

La circonstance de l'angle droit (Fig. 8) peut se déduire du cas précédent, lequel donne l'égalité $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+AC\times AC$, à cause que le point de section D est le même que le point C, lequel se reduit à celle-ci, $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$, puisque AC×AC est la même chose que $\overline{AC}^2$.

On peut cependant démontrer cette circonstance d'une maniere rigoureuse, & de plus, tout-à-fait semblable à la précédente; voici comment.

L'angle ACB étant droit, la ligne AC est nécessairement tangente, ainsi l'on a la proportion AF. AC : : AC. AE, mais AF étant égal à AB+BC, & AE=AB—BC, elle prend cette forme AB+BC. AC : : AC. AB—BC, d'où l'on tire par le produit des termes extrêmes & celui des moyens, l'égalité $\overline{AB}^2+AB\times BC-AB\times BC-\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$, & supprimant les quantités qui se détruisent, on parvient au résultat que $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$. L'on voit donc de deux manières différentes que

la propofition du célébre Pythagore n'eft qu'un cas particulier de mon Théorême.

26.

L'ANGLE (Fig. 9.) ACB étant obtus, le côté BC, en tournant autour du point B, rencontre le prolongement du troifiéme côté AC au deffous du point C, en forte que l'on a encore cette égalité $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + AC \times AD$.

CAR les fécantes AF & AD donnent cette proportion, AF. AD:: AC. AE & comme $AF = AB + BC$ & que $AE = AB - BC$, en fubftituant ces valeurs de AF & AE dans la proportion, on lui donnera cette forme $AB + BC$. AD : : AC. $AB - BC$, de laquelle on tire comme ci-devant par le produit des extrêmes & celui des moyens, l'égalité $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + AC \times AD$. C, Q, F, D.

27.

IL eft néceffaire de remarquer que l'égalité générale des trois circonftances, ne varie que par la longueur du fegment AD, lequel eft dans la première plus petit que le troifième còté AC, qui lui eft égal dans la feconde, & qu'il eft plus grand dans la troifième.

28.

ON doit encore obferver que l'égalité démontrée $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 +$

$AC \times AD$, fait connoître que la différence des quarrés du premier & du second côté, se trouve égale au rectangle fait du troisième côté AC par le segment AD, parce qu'on en peut tirer l'égalité $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = AC \times AD$.

De plus, ce rectangle étant le quarré du troisième côté, dans le cas où l'angle est droit, on peut en conclure, que dans tout triangle rectangle, le quarré du troisième côté est précisément la différence des quarrés faits sur ses deux autres côtés.

29.

Passons maintenant au second cas, où le premier côté AB est moindre que le second côté BC. (Fig. 10.)

Pour le démontrer, du point B pris pour centre & le côté BC pris pour rayon, décrivez la circonférence DGCF, qui passera nécessairement par le point D de section, ou le second côté B C coupe le troisième côté AC prolongé du côté de son extrémité A. Ensuite prolongez le premier côté A B par chacune de ses extrémités, jusqu'à la rencontre de la circonférence en G & F.

Comme les deux cordes DC & GF se coupent en proportion, on a AD. AF : : AG. AC, mais $AF = AB + BF = AB + BC$, à cause que les rayons BF & BC sont égaux, de plus $AG = BG - BA = BC - AB$, substituant dans la proportion précédente, les

valeurs de AF & de AG, elle deviendra AD. AB+BC : : BC—AB. AC dont le produit des extrémes & celui des moyens donnent l'égalité $AD \times AC = AB \times BC - \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - AB \times BC$, de laquelle ôtant les quantités qui se détruisent $+ AB \times BC$ & $- AB \times BC$, se reduit à $AD \times AC = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$ d'où l'on tire $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - AC \times AD$. C. Q. F. D.

On voit avec la plus grande évidence, qu'il faut que le segment AD soit négatif, lorsque le premier côté AB est moindre que le second côté BC, parce qu'alors $\overline{AB}^2$ est nécessairement moindre que $\overline{BC}^2$, & qu'ainsi, il faut retrancher une partie de l'étendue de $\overline{BC}^2$, pour que le reste soit égal au quarré $\overline{AB}^2$ du premier côté AB.

30.

Ce second cas n'a pas besoin de trois démonstrations comme le premier, par la raison, qu'en supposant AB moindre que BC, l'angle ACB opposé au premier côté AB, ne peut jamais se trouver qu'aigû.

31.

On voit par l'égalité $AD \times AC = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$, que le rectangle du troisième côté AC par le segment AD exprime encore la différence des quarrés faits sur les deux premiers côtés.

32.

Les deux cas de notre proposition générale sont donc exprimés par les deux égalités $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + AC \times AD$ & $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - AC \times$

AD, auxquelles on peut donner cette forme générale $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \pm AC \times AD$, où l'on voit, que le ſegment AD eſt poſitif, lorſque le point D ſe trouve au-deſſous du ſommet A du triangle oppoſé au deuxiéme côté, & qu'il eſt au contraire négatif lorſqu'il ſe trouve au-deſſus de ce point.

33.

Passons maintenant aux conſéquences qui dérivent naturellement du Théorême. (Fig. 7.)

En ſe rappellant l'égalité $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = AC \times AD$ du No. 28. qu'a donné le triangle ABC dont l'angle BCA eſt aigû, faiſant de plus attention que $\overline{AC}^2 = AC \times AD + AC \times CD$, on ſoupçonne facilement qu'en retranchant cette derniére égalité de la premiére, on parviendra à une nouvelle égalité qui pourra nous faire connoître quelque nouvelle propriété, faiſant donc en effet cette ſouſtraction, on parvient à celle-ci, $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = AC \times AD - AC \times AD - AC \times CD$ dans laquelle ſupprimant au ſecond membre ce qui ſe détruit, elle devient $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = - AC \times CD$, par laquelle on voit, qu'au moyen du ſigne négatif dont le ſecond membre eſt affecté, que dans le premier membre, les grandeurs négatives qu'il contient, ſurpaſſent les poſitives de l'étendue du rectangle AC×CD. Ainſi, dans ce cas, le rectangle AC × CD eſt donc ce qui manque au quarré $\overline{AB}^2$, du premier côté pour valoir la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés.

34.

Dans (Fig. 8.) le triangle rectangle ABC, le point de ſection D étant le même que le point C, le ſegment CD eſt nul, parconſéquent le rectangle $AC \times CD$ l'eſt auſſi, ce qui eſt trés-naturel, puiſque le quarré du premier côté AB, vaut (No 25.) préciſément la ſomme des quarrés des deux autres côtés.

35.

Quand (Fig. 9) le premier côté AB eſt oppoſé à un angle obtus BCA, on a $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + AC \times AD$, mais comme $AD = AC + CD$, le rectangle $AC \times AD$ devient $AC \times \overline{AC + CD} = \overline{AC}^2 + AC \times CD$, ainſi mettant dans l'égalité $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + AC \times AD$, à la place du rectangle $AC \times AD$, ſa valeur $\overline{AC}^2 + AC \times CD$, la même égalité aura cette nouvelle forme $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + AC \times CD$, de laquelle faiſant paſſer les termes quarrés, qui ſont au ſecond membre dans le premier, on aura l'égalité finale $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = AC \times CD$. or le ſecond membre de cette égalité étant poſitif, nous fait connoître, que ce qu'il y a de poſitif dans le premier membre, ſurpaſſe ce qu'il contient de négatif, de la valeur du rectangle $AC \times CD$, c-à-d. que le quarré du premier côté AB, excéde la ſomme des quarrés des deux autres côtés, du rectangle $AC \times CD$.

36.

De (Fig. 7.) l'égalité $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = -AC \times CD$ du No. 33.

on en tire (en faifant paffer les quantités négatives) l'égalité $\overline{AB}^2 + AC \times CD = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$, qui nous fait connoître que le quarré du premier côté AB, plus le rectangle fait du troifième AC par le fegment CD, valent enfemble la fomme des quarrés faits fur les deux autres côtés BC, AC, lorfque l'angle BCA oppofé au premier côté eft aigû.

On tire (Fig. 9.) de même, de l'égalité $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = AC \times CD$ celle-ci $\overline{AB}^2 - AC \times CD = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$, qui nous apprend, que quand l'angle BCA oppofé au premier côté AB eft obtus; que fon quarré moins le rectangle fait du troifième côté AC par fon fegment extérieur CD, vaut précifément la fomme des quarrés faits fur le fecond & le troifième côté.

Ces deux circonftances peuvent s'écrire ainfi, $\overline{AB}^2 \pm AC \times CD = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$, mais il faut fe fouvenir, que le figne $+$ appartient à la circonftance où l'angle oppofé au premier côté fe trouve aigû, & que le figne $-$, appartient à celle où ce même angle eft obtus.

L'egalite' $\overline{AB}^2 \pm AC \times CD = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$, eft l'expreffion d'un nouveau Théorême démontré avant que d'être énoncé. Comme il me paroit tout auffi important que le précédent, je crois qu'on ne fera pas fâché de le voir préfenté dans fon plus grand jour, d'autant plus que par fa nature, il doit occuper un rang diftingué parmi les propofitions fondamentales des Elémens de Géométrie.

Théorême.

Le quarré de l'un des côtés d'un triangle quelconque, vaut la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés, plus ou moins un rectangle fait par l'un de ces deux côtés, & par un ſegment de ce même côté (prolongé s'il eſt néceſſaire) compris entre le ſommet du triangle, & le point de ſection fait par le mouvement de l'autre côté, autour de ſon extrémité oppoſée au premier côté.

C'est-à-dire, que ſi l'on fait tourner le côté CD (Fig. L. M. N. P.) d'un triangle quelconque ADC, autour de ſon extrémité C, ſon autre extrémité D fera par ſon mouvement un point de ſection E ſur le côté AD prolongé s'il eſt néceſſaire, enſorte que l'on aura l'égalité $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \pm AD \times DE$.

PREPARATION.

Decrivez avec le côté CD qui a tourné autour du point C la circonférence entière FDB, enſuite prolongez la baſe AC de part & d'autre juſques à la circonférence.

Avant de paſſer à la démonſtration, vous devez obſerver que le ſegment DE, a toujours pour ſon commencement immuable le ſommet D du triangle, mais que ſon autre extrémité E, qui eſt en même tems le point de ſection, eſt ſuſceptible de quatre ſituations différentes qui diverſifient la demonſtration.

1°. Si

1°. Si l'angle D eſt obtus, le point de ſection E ſe trouve néceſſairement au-deſſus du ſommet D ſur le prolongement du côté AD, & dans ce cas le ſegment DE eſt poſitif. (Fig. L.)

2°. Si l'angle D eſt droit (Fig. M), le point de ſection E ſe trouve confondu avec le ſommet D, ce qui fait que le ſegment DE eſt nul, & que parconſéquent il n'y a point de rectangle à ajoûter ou ſouſtraire.

3°. Lorsque l'angle (Fig. N) du ſommet D eſt aigû, & que CD eſt moindre que CA, le point de ſection E ſe trouve néceſſairement ſur le côté DA, au-deſſous du ſommet D, ce qui rend le ſegment DE négatif.

4°. Enfin, (Fig. P) l'angle D étant aigû, & CD plus grand que CA, le point de ſection E tombe ſur le prolongement du côté DA, au-deſſous de la baſe AC, ce qui fait que le ſegment DE continue d'être négatif, en devenant plus conſidérable.

Ces quatre ſituations différentes du point de ſection E, ne produiſent cependant que trois reſultats différens. 1°. Lorſque le point de ſection E (Fig. L) ſe trouve au-deſſus du ſommet D, on a toujours l'égalité $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + AD \times DE$. 2°. Lorſque le point de ſection (Fig. M.) eſt ſur le ſommet D du triangle, on a $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$. 3°. Lorſque le point de ſection (Fig. N. P.) eſt ſous le ſommet D, on a l'égalité $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - AD \times DE$.

Demonstration du cas où le point de section E se trouve au-dessus du sommet D du triangle. (Fig. L.)

Les deux lignes AB, AE étant deux sécantes au cercle, donnent la proportion AB : AE :: AD : AF, mais AB = AC + CD, & AE = AD + DE, & AF = AC — CD, ainsi en transposant ces valeurs dans la proportion, on aura AC + CD : AD + DE :: AD : AC — CD, de laquelle faisant le produit des extrêmes & celui des moyens, on trouvera l'égalité $\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + AD \times DE$, faisant passer le terme négatif qui se trouve dans le premier membre au second, on aura l'égalité finale $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + AD \times DE$.

Demonstration du cas où le point de section E tombe sur le sommet D du triangle. (Fig. M).

L'angle D du sommet étant droit, le côté AD se trouve tangente au cercle décrit du point C, avec le côté CD, ce qui fait que le côté AD ne peut être rencontré qu'au seul point D, mais comme AB est sécante, on a la proportion AB : AD :: AD : AF, or AB = AC + CD, & AF = AC — CD, ainsi en transposant ces valeurs, on aura AC + CD : AD :: AD : AC — CD, de laquelle faisant le produit des extrêmes & celui des moyens, on aura l'égalité finale $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$.

Demonstration du troisième cas, où le point de section E tombe sur le côté AD (Fig. N.)

Les lignes AB, AD étant deux sécantes, donnent la proportion

$AB : AD :: AE : AF$, mais $AB = AC + CD$, $AE = AD - DE$, $AF = AC - CD$, mettant ces valeurs dans la proportion, on aura $AC + CD : AD :: AD - DE : AC - CD$, de laquelle faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, on aura l'égalité $\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 - AD \times DE$, faiſant paſſer le terme négatif du premier membre, dans le ſecond on parviendra à l'égalité finale $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - AD \times DE$.

Demonstration du quatrième cas, où le point de ſection E ſe trouve ſur le prolongement du côté AD ſous la baſe AC. (Fig. P.)

Les deux lignes FB, DE étant deux cordes qui ſe coupent dans un cercle, donnent la proportion $AB : AD :: AE : AF$, mais $AB = CD + AC$, $AE = DE - AD$, $AF = CD - AC$, mettant ces valeurs dans la proportion, elle deviendra $CD + AC : AD :: DE - AD : CD - AC$, de laquelle faiſant le produit des moyens & celui des extrêmes, on aura l'égalité $AD \times DE - \overline{AD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{AC}^2$, d'où l'on tire l'égalité finale $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 - AD \times DE$.

38.

Il eſt évident que le rectangle $AD \times DE$ eſt dans tous les cas, la différence du quarré de la baſe, à la ſomme des quarrés des deux autres côtés.

Il ſuit (Fig. Q) de-là, que ſi l'on fait tourner le côté AD autour de ſon extrémité A, pour faire le point de ſection F ſur le côté CD. Et qu'enſuite on faſſe tourner CD autour de ſon extrémité C, pour

faire le point de ſection E ſur AD, qu'on aura $AD \times DE = DC \times DF$, puiſque ces deux rectangles ſont chacun la différence du quarré de la baſe AC, à la ſomme des quarrés des deux autres côtés AD, CD.

39.

Par le premier Théorême on a, $\overline{AC}^2 = \overline{DC}^2 + AD \times AE$, & $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + DC \times CF$, donc $\overline{DC}^2 + AD \times AE = \overline{AD}^2 + DC \times CF$, d'où l'on tire $AD \times AE - DC \times CF = \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2$, ce qui nous fait connoître, que la différence des quarrés des deux côtés AD, DC, eſt égale à la différence des deux rectangles, l'un fait par AD & AE, l'autre par DC & CF.

Si du ſommet D, l'on abaiſſe une perpendiculaire DG, & que l'on porte le petit ſegment CG de G en H, pour avoir $AH = AG - GC$ différence des deux ſegmens; comme on ſait que $\overline{AD}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{GC}^2 = \overline{AG + GC} \times \overline{AG - GC} = AC \times AH$. Ainſi puiſque par le corollaire précédent $AD \times AE - DC \times CF = \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2$, on a auſſi $AD \times AE - DC \times CF = AC \times AH$; d'où on tire l'égalité $AD \times AE = AC \times AH + DC \times CF$, ce qui fait connoître que le rectangle du côté moyen AD par ſon ſegment AE, vaut préciſément la ſomme des rectangles faits par les deux autres côtés DC, AC, & par leurs ſegmens CF, AH.

40.

Si trois lignes droites étoient données, & que l'on propoſa de

les divifer chacune en deux parties, de manière que le rectangle de la moyenne par l'un de fes fegmens, fût égal à la fomme des rectangles faits fur chacune des deux autres lignes, par un de leurs fegmens, on conftruiroit avec ces trois lignes, un triangle, fur lequel on feroit les conftructions qu'on vient de voir, & le problême feroit refolu.

Si l'on avoit (Fig. R), un triangle ABC, ayant les côtés AB, AC égaux, & en même-tems plus grand chacun que le troifième côté BC. Alors, en faifant tourner les côtés AB, CB, autour de leurs extrêmités A & C, pour faire des points de fection; le côté AB fera fa fection fur BC au point C, à caufe de AB = AC, le côté BC fera la fienne fur AB au point D. Anifi (38.) on aura AB × BD = BC × BC, égalité qui donne la proportion continuë AB : BC :: BC : BD. Il feroit encore aifé de voir que cette proportion a lieu, indépendamment de cette raifon, car il eft évident, en tirant DC, que les deux triangles iffocelles BAC, BCD font femblables.

La proportion continuë AB : BC :: BC : BD, nous découvre une propriété des triangles iffocelles, qui confifte, en ce que, fi l'on fait tourner la bafe, autour de l'une de fes extrêmités, fon autre extrêmité coupe le côté oppofé, ou fon prolongement en un point qui eft tellement fitué, que cette bafe fe trouve moyenne proportionnelle, entre le côté oppofé au centre du mouvement, & le fegment compris entre le point de départ & celui de fection.

Puisque le triangle BCD eft iffocelle, fi l'on fait tourner fa bafe

BD autour du point D, ſon autre extrêmité B coupera le côté BC en E, enſorte que l'on aura la proportion BC : BD : : BD : BE.

En comparant la proportion précédente avec celle - ci, on voit aiſément qu'elles ont leurs rapports égaux, & qu'ainſi elles forment la ſuite des rapports égaux AB : BC : : BC : BD : : BD : BE, où les conſéquents deviennent antécédents des rapports ſuivants, ainſi les termes de cette ſuite forment la progreſſion ÷ AB : BC : BD : BE.

Ce qu'il faut obſerver dans cette progreſſion, c'eſt que l'un des côtés égaux AB du triangle iſſocelle BAC en eſt le premier terme, & que ſa baſe BC en eſt le ſecond, & le rapport de AB à BC la raiſon.

Si l'on faiſoit à préſent tourner la baſe BE du triangle iſſocelle BDE autour de ſon extrêmité E, ſon autre extrêmité B feroit ſur BD le point de ſection F, enſorte qu'on auroit BD : BE : : BE : BF.

Tournant enſuite FB autour du point F, ſon extrêmité B fera ſur BE le point de ſection G, enſorte qu'on aura BE : BF : : BF : BG.

Les rapports de ces deux dernières proportions, étant les mêmes que ceux de la progreſſion, leur quatrième terme lui ſervent de continuation, ainſi on a ÷ AB : BC : BD : BE : BF : BG.

Il eſt aſſez clair, que l'on peut continuer de faire tourner la dernière baſe BG & les ſuivantes, pour avoir les termes ſuivans de

la progreſſion, ainſi on peut la continuer tant que l'on veut. Mais on doit obſerver que le point B eſt la limite de tous les termes de la progreſſion, quoiqu'on lui voie un nombre de termes non limités.

Il eſt maintenant facile de s'appercevoir, que lorſqu'on aura deux lignes droites, pour premier terme d'une progreſſion géométrique décroiſſante, il ſera facile de trouver les lignes ſuivantes, en formant ſur la moindre des deux, un triangle iſſocelle, dont les deux autres côtés ſeront égaux à la plus grande.

Si l'on vouloit avoir les lignes qui forment la progreſſion croiſſante, dont on a les deux premières; on formeroit ſur la plus grande des deux, un triangle iſſocelle, dont les deux autres côtés ſeroient égaux à la moindre, l'on trouveroit les autres lignes en opérant dans un ſens contraire, c'eſt-à-dire ſur les prolongemens des côtés BA & BC faits aux extrêmités A & C.

41.

Par le moyen de ce Théorême, on peut reſoudre généralement ce Problême, connoiſſant deux côtés d'un triangle quelconque, & l'angle compris, trouver le troiſième côté.

Soit un triangle quelconque ACB, dont on connoit les deux côtés AB & AC, avec l'angle A formé par ces deux côtés, & que l'on veuille connoître ſon troiſième côté CB. On y parviendra de cette manière.

i l'angle A eſt aigû, on imaginera que le plus petit (Fig 11.) des deux côtés, qui dans ce cas eſt AC, tourne ſur l'extrémité C oppoſée au côté AB le plus grand des deux côtés connus, pour former ſur ce même côté le point de ſection E, lorſque CA ſe trouvera dans la poſition CE; alors on aura par la ſeconde égalité $\overline{CB}^2 + AB \times AE = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$, d'où l'on tire $\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 - AB \times AE$, or dans ce ſecond membre il n'y a que la ligne AE dont la longueur ſoit inconnue, mais que l'on parviendra facilement à connoître, en obſervant que ſi du même point C l'on abaiſſe une perpendiculaire CD, elle partagera AE en deux parties égales en D, enſorte que AE ſe trouve double de AD.

Faisant enſuite refléxion, que dans le triangle ACD, on connoit l'angle A (par l'hypothèſe) & l'angle ADC qui eſt droit, que par conſéquent on connoit l'angle ACD qui ſe trouve complément de l'angle A, & de plus le côté AC, qu'ainſi pour trouver AD, on n'a qu'à faire cette proportion. Le ſinus total, eſt au ſinus du complément de l'angle A. comme AC eſt à AD, & comme les trois premiers termes de cette proportion ſont connus, on trouvera la valeur de AD, laquelle étant doublée donnera la valeur de AE.

Par l'égalité $\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - AB \times AE$ on voit qu'il faut multiplier la longueur connue du côté AB par la longueur trouvée à la ligne AE, & retrancher le produit de la ſomme $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$ des quarrés des deux côtés connus, dont le reſte ſera le quarré du côté inconnu

inconnu CB, tirant la racine quarrée de ce reſte, on aura la longueur du troiſième côté CB, que l'on vouloit avoir.

Il réſulte évidemment, que pour trouver le troiſième côté d'un triangle, dont on connoit les deux premiers côtés, & l'angle aigû formé par ces deux mêmes côtés, il faut tout ſimplement faire la ſomme des quarrés des deux côtés connus, puis faire cette proportion, le ſinus total, eſt au ſinus du complément de l'angle connu, comme le plus petit des deux côtés que l'on connoit, eſt à un quatriéme terme, lequel étant trouvé, on prendra ſon double, que l'on multipliera par le plus grand des deux côtés connus, puis on retranchera le produit de la ſomme des quarrés déja faite, & l'on extraira la racine quarrée du reſte, qui ſera l'expreſſion de la longueur du côté qui étoit inconnu.

42.

Si l'angle CAB formé par les deux côtés connus (Fig. 12.) CA & AB ſe trouve obtus, alors le petit côté CA en tournant ſur ſon extrêmité C, ne peut couper le côté AB que dans ſon prolongement en E, enſorte que le triangle ACE étant iſocelle, la perpendiculaire CD tombe ſur le milieu de AE, & comme le triangle ADC eſt rectangle en D, que ſon angle CAD étant ſupplément de l'angle connu CAB, eſt auſſi connu, donc, ſon complément ACD eſt auſſi connu, ainſi pour connoître AD, on fera cette proportion, le ſinus total, eſt au ſinus du complément de l'angle qui eſt ſupplément de

CAB, comme le petit côté connu CA, eſt à AD, or comme les trois premiers termes ſont connus, on connoîtra AD, que l'on doublera, pour avoir la longueur de AE.

On ſe rappellera enſuite, que l'angle CAB étant obtus on a (No. 37.) l'égalité que voici, $\overline{CB}^2 - AB \times AE = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$, qui donne en tranſpoſant $\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + AB \times AE$, par laquelle on voit qu'il faut ajoûter à la ſomme des quarrés des deux côtés connus, le produit du plus grand des deux par AE, pour avoir la valeur du quarré du côté inconnu CB, par conſéquent en extrayant la racine quarrée de cette ſomme, on aura l'expreſſion de la longueur du troiſième côté CB, que l'on vouloit trouver.

On voit donc, que l'on peut parvenir à connoître le troiſième côté d'un triangle quelconque dont on connoit un angle avec les les deux côtés qui le forment, ſans avoir beſoin de connoître la valeur des deux autres angles du triangle, ainſi qu'on a fait juſqu'à préſent, faute d'avoir fait la découverte du Théorême général qui conduit à cette ſolution.

43.

L'avantage des propoſitions univerſelles eſt tel, qu'elles ouvrent un vaſte champ pour en découvrir d'autres, qui leur ſont ſi étroitement unies qu'en les voyant, on ne peut preſque pas s'empêcher de voir celles qui en découlent comme de leur ſource. Nos deux Théorêmes ſont cet effet, ils conduiſent plus loin qu'on ne peut ſe l'imaginer, ainſi qu'on le verra par ce qui ſuit.

Soit (Fig. 13.) le triangle ABC, dont on prend BC pour premier côté, & BA pour le ſecond, en le faiſant tourner autour du point B, ſon autre extrêmité A fera ſur le troiſième côté AC le point de ſection D, enſorte que par le premier Théorême on aura l'égalité $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + AC \times CD$, & que par le ſecond Théorême on aura la ſeconde égalité $\overline{BC}^2 + AC \times AD = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Ensuite prenant AB pour premier côté du triangle ABC, & AC pour ſecond côté, pour faire tourner ce dernier autour du point A, ſon autre extrêmité C fera ſur le troiſième côté BC le point de ſection E, enſorte que par le premier Théorême l'on aura l'égalité $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - BC \times BE$, & par le ſecond Théorême $\overline{AB}^2 + BC \times CE = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.

Enfin, prenant AC pour premier côté, & BC pour ſecond côté, pour faire tourner celui-ci autour de ſon extrêmité C, l'autre extrêmité B fera ſur le troiſième côté AB prolongé s'il eſt néceſſaire le point de ſection F, enſorte que par le premier Théorême on aura $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + AB \times AF$, & par le ſecond Théorême $\overline{AC}^2 + AB \times BF = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$.

Presentement, ſi l'on ajoûte les membres correſpondans des trois premières égalités, on formera cette nouvelle égalité $\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + AC \times CD + \overline{AC}^2 - BC \times CE + \overline{BC}^2 + AB \times AF$, de laquelle ſupprimant les quarrés qui ſont communs aux deux membres, on aura $O = AC \times CD - BC \times CE + AB \times AF$ de laquelle faiſant paſſer la quantité négative qui ſe trouve au ſecond membre dans le

premier, on parvient à l'égalité finale $BC \times CE = AC \times CD + AB \times AF$, qui nous fait connoître, que le rectangle fait par le côté moyen BC & par son segment CE, vaut précisément la somme des deux rectangles faits par chacun des deux autres côtés, & par leurs segmens.

De même si l'on ajoûte les membres correspondans des trois secondes égalités, on aura l'égalité $\overline{BC}^2 + AC \times AD + \overline{AB}^2 + BC \times CE + \overline{AC}^2 + AB \times BF = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$, & que l'on supprime de chaque membre la somme $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, des quarrés des trois côtés, on parviendra à l'égalité finale $AC \times AD + BC \times CE + AB \times BF = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$, qui nous fait voir, que la somme des rectangles faits par chacun des côtés du triangle & par leurs segmens secondaires, vaut précisément la somme des quarrés faits sur les trois côtés du triangle.

Je termine ici ce Coup d'Essai, par la raison que si je voulois épuiser la chaîne des vérités dont les deux Théorêmes sont les premiers anneaux, il pourroit arriver que ma vie ne fût pas assez longue pour en voir la fin, ainsi je crois avoir suffisamment rempli ma tâche sur ce sujet, en ouvrant une mine, dont je fais entrevoir les ramifications du trésor qu'elle renferme, c'est à ceux qui viendront après moi, d'en savoir tirer parti.

FIN du premier Coup d'Essai, &c.

SECOND
COUP D'ESSAI
GÉOMÉTRIQUE
SUR LES POLIGONES INSCRITS ET

CIRCONSCRITS AU CERCLE.

SECOND COUP

D'ESSAI GÉOMÉTRIQUE

Sur les Poligones inſcrits & circonſcrits au Cercle.

JE n'ai pas encore vu qu'on ait découvert la Loi que ſuivent les Poligones inſcrits au Cercle, correſpondante à celle des circonſcrits que M. Zanotti Profeſſeur de Mathématique à Boulogne publia en 1748, dans un Mémoire fort étendu ſur ce ſujet, imprimé à la ſuite de ceux de l'Académie des Sciences de Paris.

L'Auteur démontre dans ce Mémoire, que les Poligones réguliers ou irréguliers circonſcrits au Cercle, ſont entr'eux comme leurs périmètres. Et que les Solides réguliers ou irréguliers circonſcrits à la Sphere, ſont entr'eux comme leurs ſurfaces.

J'ai été curieux de ſavoir ſi les Poligones inſcrits au Cercle, ſuivoient une Loi pareille, mais modifiée par quelque exception, ou par quelqu'autre Loi, & j'ai eu le bonheur de réuſſir même au-delà de mes eſpérances.

Je démontre dans ce petit Mémoire, que les Poligones inſcrits au Cercle, ſont entr'eux comme les périmètres des Poligones inſ-

DEMONSTRATION.

L'aire du triangle AGE $= \frac{AF}{2} \times GE$, & celle du triangle GBE $= \frac{BF}{2} \times GE$. Or l'aire du quadrilatere AEBG vaut les deux triangles AGE, GBE, donc AEBG $= \frac{AF}{2} \times GE + \frac{BF}{2} \times GE = GE \times \frac{AF+BF}{2}$, mais $AF+BF=AB$, donc AEBG $= \frac{AB}{2} \times GE$. Il est donc démontré que l'aire d'un quadrilatere quelconque AEBG est égale au produit $\frac{AB}{2}$ moitié du rayon, par GE côté du Poligone simple. Mais le nombre des quadrilateres qui composent l'aire du Poligone double, est nécessairement égal au nombre des côtés du Poligone de GE, donc si nous nommons chacun des côtés du Poligone simple par une des lettres m, n, p, q, r, s, t, &c. chaque quadrilatere formé sur un des côtés du Poligone simple, sera égal au produit de ce côté, par la moitié du rayon, & par conséquent ils seront exprimés ou representés par les produits $\frac{AB}{2} \times m$, $\frac{AB}{2} \times n$, $\frac{AB}{2} \times p$, $\frac{AB}{2} \times q$, $\frac{AB}{2} \times r$, $\frac{AB}{2} \times s$.... &c. Mais la somme $\frac{AB}{2} \times m + \frac{AB}{2} \times n + \frac{AB}{2} \times p + \frac{AB}{2} \times q + \frac{AB}{2} \times r + \frac{AB}{2} \times s + \frac{AB}{2} \times t +$ &c. de tous ces produits, est égale à la quantité $\frac{AB}{2} \times \overline{m+n+p+q+r+s+t \ldots}$ &c C'est-à dire au produit de $\frac{AB}{2}$ moitié du rayon par $m+n+p+q$

$+ r + s + t$, &c. ſommes des côtés du Poligone ſimple, ou ce qui revient au même à ſon périmètre C, Q, F, D.

REMARQUE. Ce que nous venons de démontrer eſt généralement vrai pour les Poligones reguliers ou irréguliers ſimples, parce que nous avons ſuppoſé que le rayon AB perpendiculaire ſur GE, déterminoit le point B par lequel on tire les deux côtés égaux BG, BE. On doit obſerver que par cette ſuppoſition le rayon AB eſt la ſomme des hauteurs AF + FB des deux triangles AGE, GBE, ce qui n'a plus lieu dès que (Fig. 15.) le rayon AB prend la poſition AL, car abaiſſant la perpendiculaire LM ſur GE, on a les deux triangles rectangles AFG, GML qui donnent par leurs propriétés AG $>$ AF, & GL, $>$ LM, d'où on tire AG + GL $>$ AF + LM ou AL $>$ AF + LA, c-à-d, le rayon AL plus grand que la ſomme des deux hauteurs AF, ML des deux triangles AGE, GLE, ce qui limite notre Théorême au ſeul cas où les côtés BG, BF ſont égaux.

On doit encore obſerver, que dans notre Théorême les Poligones irréguliers tendent à devenir reguliers. Car d'un Poligone ſimple dont tous les côtés ſont inégaux, en multipliant leur ſomme par la moitié du rayon, on trouve l'aire d'un Poligone irrégulier dont le nombre des côtés eſt double, mais qui ſont égaux deux à deux, ſi on multiplie la ſomme de ceux-ci par la moitié du rayon, on ſaura l'aire d'un autre Poligone qui aura le double des côtés, leſquels ſeront égaux quatre à quatre, & ſi on continuoit l'opération, les

côtés feroient égaux huit à huit, feize à feize, &c. Dans une progreffion géométrique dont l'expofant eft deux.

THEOREME 2.

Les Poligones infcrits au Cercle font entr'eux, comme les périmètres des Poligones infcrits, qui n'ont que la moitié du nombre de leurs côtés.

DÉMONSTRATION. Les aires des deux Poligones infcrits font (Théorême I.) égales aux produits des périmètres des Poligones infcrits qui n'ont que la moitié du nombre de leurs côtés, par la moitié du rayon. Ainfi puifque ces produits ont le même multiplicateur qui eft le demi rayon, ils font donc entr'eux comme les multiplicandes qui font les deux périmètres des Poligones qui n'ont que la moitié du nombre des côtés de ceux dont on compare les aires. Et comme la même chofe auroit lieu pour un nombre quelconque des Poligones infcrits donc, &c. C, Q, F, D.

REMARQUE. Ce Théorême quoique très-beau a des exceptions confidérables, car il eft aifé de voir qu'il n'a pas lieu pour les Poligones reguliers dont le nombre des côtés eft impair, ni pour les irréguliers qui n'ont pas leurs côtés égaux deux à deux, quatre à quatre, huit à huit, &c. Mais il paroit évidemment par cela, que la nature du Cercle affecte le nombre pair & la regularité.

THEOREME 3.

Les Poligones infcrits, font aux Poligones circonfcrits, comme

les périmètres des Poligones inſcrits avec la moitié moins de côtés, ſont, aux périmètres des Poligones circonſcrits.

DÉMONSTRATION. Les aires des Poligones inſcrits ſont égales aux produits des périmètres des Poligones inſcrits qui n'ont que la moitié du nombre de leurs côtés, par la moitié du rayon. Et les aires des Poligones circonſcrits ſont égales aux produits de leurs périmètres par le demi rayon. Les Poligones inſcrits & circonſcrits ont donc pour multiplicateur commun le demi rayon, les produits ſont donc entr'eux comme les multiplicandes, donc, &c. C, Q, F, D.

THEOREME 4.

Le cercle eſt à un Poligone inſcrit, comme la circonférence eſt au périmètre d'un autre Poligone inſcrit avec la moitié moins de côtés.

DÉMONSTRATION. En conſidérant le Cercle comme le plus grand & dernier Poligone inſcrit, on aura (Théor. 2.) cette proportion, le Cercle eſt au Poligone inſcrit, comme le perimètre d'un Poligone qui auroit la moitié moins des côtés que le Cercle, eſt au périmètre d'un Poligone qui a la moitié moins de côtés que celui auquel on compare le Cercle. Mais ſi on fait attention que la différence entre la circonférence & le périmètre d'un Poligone qui a la moitié moins de côtés que le Cercle, eſt un vrai zéro relatif, parce que c'eſt (le cas) où la différence des périmètres de deux Poligones dont l'un a le double de côtés que l'autre s'evanouit. On pourra

conclure, que la circonférence est exactement égale à ce périmètre, & qu'ainsi l'aire du Cercle, &c. C, Q, F, D.

THEOREME 5.

Si deux Poligones semblables sont inscrits & circonscrits à un Cercle, & qu'on inscrive un autre Poligone avec le double de côtés, ce dernier sera moyen proportionel entre les deux premiers (*a.*) (Fig. 16.)

Soit GE & LC deux côtés homologues des deux Poligones semblables inscrits & circonscrits, & que BE = BG soient deux côtés du Poligone inscrit avec un nombre de côtés double.

Par le Théorême 2. nous avons la proportion que voici; le Poligone de BE, est à celui de LC, comme le périmètre du Poligone de GE, est au périmètre du Poligone de LC, ou ce qui revient au même, comme GE est à LC. Mais le rapport de GE à LC est soudoublé de celui du quarré $\overline{GE}^2$ au quarré $\overline{LC}^2$ qui exprime le rapport du Poligone de GE au Poligone de LC, donc le Poligone de BE est au Poligone de LC en raison soudoublée de celle du Poligone de GE au Poligone de LC, donc le Poligone de BE est moyen proportionel entre les Poligones de GE & de LC, C, Q, F, D.

DÉMONSTRATION 2. Les aires AEG, AEBG, ACL sont par leur constr. des parties semblables des trois Poligones de GE, de

(*a*) Ce Théorême ne m'appartient point, j'en ai lu l'énoncé quelque part, sans en voir la démonstration, c'est ce qui m'a engagé de la faire, & je l'ai placé ici à cause de sa beauté.

de BE & de LC, ainſi ce qui ſera démontré de ces parties le ſera de leurs touts.

Le triangle AEG $= \frac{AF \times GE}{2}$, le quadrilatère AEBG $= \frac{AB}{2} \times$ GE, donc AEG. AEBG :: $\frac{AF}{2} \times$ GE. $\frac{AB}{2} \times$ GE :: AF. AB, ainſi le triangle AEG eſt au quadrilatère AEBG, comme AF eſt à AB.

Mais les triangles AEG, ACL étant ſemblables, ſont entr'eux comme les quarrés de AF & AB, la raiſon du triangle AEG au triangle ACL eſt donc doublée de celle du triangle AEG au quadrilatère AEBG. Ce quadrilatère AEBG eſt donc moyen proportionel entre les deux triangles AEG, ACL. C, Q, F, D.

THEOREME 6.

Le périmètre d'un Poligone inſcrit ſimple, eſt au périmètre d'un Poligone circonſcrit double, comme l'apothème de l'inſcrit plus le rayon, eſt au diamètre. Il faut prouver que GE. EDIG :: AB + AF. 2 AB. (Fig. 16.)

Tirez du centre A au point D extrêmité du côté ID du Poligone circonſcrit double, la ligne AD.

Comme le point D eſt de toute néceſſité également éloigné des extrêmités B & E de la corde BE, il s'enſuit que l'angle FAE eſt diviſé en deux parties égales par la ligne AD, parconſéquent la ligne FE eſt coupée au point H en deux ſegmens FH, HE proportionels aux côtés AF, AE du triangle AFE. On a donc la proportion FH.

HE:: AF. AE $=$ AB, d'où on tire FH $+$ HE. HE:: AF $+$ AB. AB, laquelle étant ſimplifiée devient FE. HE:: AB $+$ AF. AB, donc HE $= \frac{AB \times FE}{AB + AF}$, donc 4 HE $= \frac{4\ AB \times FE}{AB + AF}$, mais à cauſe des angles égaux HES, DES on a HE $=$ DE, & 4 HE $=$ 4 DE $=$ EDIG, donc EDIG $= \frac{4\ AB \times FE}{AB + AF}$, donc enfin GE. EDIG:: GE. $\frac{4\ AB \times FE}{AB + AF}$:: 2 FE. $\frac{2 AB \times 2 FE}{AB + AF}$:: AB $+$ AF. 2 AB. C, Q, F, D.

COROLAIRE 1. Comme la proportion GE. EDIG:: AB $+$ AF. 2 AB, peut être poſée de cetté manière AB $+$ AF. 2 AB:: GE. EDIG, il ſuit de-là que le périmètre EDIG du Poligone circonſcrit double, eſt quatrième proportionel au rayon plus l'apothême de l'inſcrit, au diamètre, & au périmètre de l'inſcrit ſimple.

Ainsi nommant P le périmètre du Poligone inſcrit ſimple, on trouvera celui du Poligone circonſcrit double par cette proportion

$$AB + AF.\ 2\ AB :: P.\ X = \frac{2\ AB \times P}{AB + AF.}$$

COROLAIRE 2. L'aire d'un Poligone circonſcrit double étant égale au produit de ſon périmètre par la moitié du rayon, vaut donc la quantité $\frac{2\ AB \times P}{AB + AF} \times \frac{AB}{2} = \frac{\overline{AB}^{2} \times P}{AB + AF.}$

THEOREME 7.

La (Fig. 17.) perpendiculaire AS d'un Poligone inſcrit double, eſt moyenne proportionelle entre $\frac{AB}{2}$ moitié du rayon, & AB + AF ſomme du rayon & de la perpendiculaire du Poligone inſcrit ſimple. De même, le côté BE du Poligone inſcrit double, eſt moyen proportionel entre le diamètre BL, & BF = AB — AF différence du rayon à l'apothème de l'inſcrit ſimple.

Tirez de l'extrêmité E du côté BE du Poligone inſcrit double à l'extrêmité L du diamètre BL la ligne LE.

DÉMONSTRATION. Le triangle BEL étant rectangle en E, & la ligne EF perpendiculaire abaiſſée de l'angle droit ſur l'hypotenuſe BL, on a la proportion continuë BL. EL : : EL. LF, dont tous les termes étant diviſés par deux, devient $\frac{BL}{2}. \frac{EL}{2} :: \frac{EL}{2}. \frac{LF}{2}$; Mais $\frac{BL}{2}$ = AB, & $\frac{LE}{2}$ = AS (puiſque BL. BA : : LE. AS, à cauſe du paralléliſme des lignes AS, LE, qui ſont l'une & l'autre perpendiculaires ſur BE, & que d'ailleurs BL étant double de BA, LE eſt auſſi double de AS), ainſi en mettant les valeurs de $\frac{BL}{2}$ & de $\frac{LE}{2}$ dans la proportion précédente, on aura AB. AS : : AS. $\frac{LF}{2}$, ou ce qui eſt la même choſe $\frac{AB}{2}$. AS : : AS. LF = AB + AF. C Q F 1° D.

2°. Puisque

2°. PUISQUE BE eſt un côté de l'angle droit du triangle rectangle BEL, il eſt donc moyen proportionel entre BL & BF, où entre 2 AB & AB—AF. C, Q, F, 2°. D.

COROLAIRE 1. La perpendiculaire AS d'un Poligone inſcrit doublé, eſt donc exprimée par la quantité $AS = \sqrt{\frac{(AB + AF) \times AB}{2}}$

COROLAIRE 2. Il ſuit auſſi de ce Théorême, que l'expreſſion du côté BE du Poligone inſcrit double eſt la quantité $\sqrt{(AB - AF) \times 2AB}$.

THEOREME 8.

L'AIRE d'un Poligone circonſcrit, eſt moyenne proportionelle harmonique entre ſon Poligone ſemblable inſcrit, & le Poligone ſimple circonſcrit. (Fig. 16.)

IL faut prouver que les trois aires ACL, AEDIG, AEBG forment une proportion harmonique, nous allons d'abord déterminer leur valeur, enſuite nous verrons ſi la proportion harmonique exiſte.

LES triangles ſemblables AEG, ACL donnent la proportion AF AB : : GE CL $= \frac{AB \times GE}{AF}$ donc $ACL = LC \times \frac{AB}{2} = \frac{AB \times GE}{AF} \times \frac{AB}{2} = \frac{\overline{AB}^2 \times GE}{2AF}$

PAR le Corol. 1. du 6 Théorême, on a cette proportion AB + AF. 2AB : : GE. EDIG $= \frac{2AB \times GE}{AB + AF}$, ainſi l'aire AEDIG = EDIG ×

$$\frac{AB}{2} = \frac{2AB \times GE}{AB + AF} \times \frac{AB}{2} = \frac{AB^2 \times GE}{AB + AF}.$$

A l'égard de l'aire AEBG, on sait par le Théorême 1. qu'elle est exprimée par la quantité $\frac{AB \times GE}{2}$.

Pour faciliter nos calculs, nommons le rayon $AB = a$, $AF = b$, & transposons ces caractères analytiques dans les expressions des trois aires, par ce moyen nous aurons $ALC = \frac{AB^2 \times GE}{2\,AF} = \frac{a^2 c}{2b}$. $AEDIG = \frac{AB^2 \times GE}{AB + AF} = \frac{a^2 c}{a + b}$, & $AEBG = \frac{ac}{2}$.

Presentement voyons si ces trois aires remplissent les conditions requises pour former la proportion harmonique, c-à-dire, si la plus grande est à la plus petite, comme l'excès de la plus grande sur la moyenne, est à l'excès de la moyenne sur la plus petite. Ce qu'on verra facilement, en mettant les expressions analytiques dans cet ordre de proportion $\frac{a^2 c}{2b} . \frac{ac}{2} :: \frac{a^2 c}{2b} - \frac{a^2 c}{a+b} . \frac{a^2 c}{a+b} - \frac{ac}{2}$, qui en sera réellement une, si le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. Or c'est ce qu'on trouve effectivement, car ces produits sont $= \frac{a^4 c^2}{2a + 2b \times b} - \frac{a^3 c^2}{4\,b} = \frac{a^3 c^2}{4\,b} - \frac{a^3 c^2}{2a + 2b}$, lesquels étant di-

visés par $a^3 c^2$, donnent $\frac{2}{\overline{2a+2b}\times b} - \frac{1}{4b} = \frac{1}{4b} - \frac{1}{2a+2b}$, &

reduisant chaque membre en une seule fraction, on aura $\frac{4ab-2ab-2b^2}{\overline{2a-2b}\times 4b^2} = \frac{2a+2b-4b}{\overline{2a+2b}\times 4b}$, simplifiant les numérateurs, & multipliant par $\overline{2a-2b}$ on aura pour la simplifiée $\frac{2ab-2b^2}{4b^2} = \frac{2a-2b}{4b}$, ou bien $\frac{\overline{2a-2b}}{2b} \times \frac{b}{b} = \frac{2a-2b}{4b}$ où l'on voit que l'égalité existe C, Q, F, D.

Voici comment M. Saurin a énoncé & démontré ce Théorême, dans les Mémoires de l'Académie R. des Sciences année 1723. qui m'est tombé entre les mains après que j'ai eu fait cette démonstration, & par cette raison, je n'ai fait que produire ce qu'il avoit fait longtems auparavant, & d'une manière plus élégante.

THEOREME 9.

Toute figure regulière circonscrite au Cercle, est moyenne proportionelle harmonique entre l'aire de la même figure inscrite, & celle de la circonscrite qui a la moitié moins de côtés. (Fig. 18.)

Soit mené dans le Cercle BEG le côté BE d'une figure regulière, le rayon CE, est la tangente EA qui rencontre en A le

rayon CB prolongé. Il eſt évident que BEC étant une partie de la figure inſcrite, BFEC eſt une partie correſpondante de la même figure circonſcrite, & ACE une partie de la circonſcrite qui a la moitié moins de côtés: ce qu'on démontrera de la partie ACE par rapport aux parties BFEC, & BEC ſera démontré des figures entières.

Les triangles ACE & BEC ayant même hauteur, ſont entr'eux comme leurs baſes AC, BC, il faut donc démontrer que ABF qui eſt l'excès dont AEC ſurpaſſe BFEC eſt à BFE, excès dont BFEC ſurpaſſe BEC, comme AC à BC.

Les triangles ABF & BFE ſont ent'eux comme AF à FE, ou (à cauſe que FB eſt égale à FE) comme AF à FB. Mais les triangles ABF & ACE étant rectangles & ayant l'angle BAF commun, ſont ſemblables. Donc AF eſt à FB :: AC. CE, ou CE étant égale à CB, comme AC à CB; donc les triangles ABF, BFE, ſont entr'eux comme AC à CB. C, Q, F, D.

THEOREME 10.

Le périmètre d'un Poligone inſcrit double, eſt moyen proportionel entre le périmètre du Poligone ſimple inſcrit, & le périmètre du double circonſcrit. Il faut prouver que GE. GBE :: GBE. GIDE.

DEMONSTRATION.

En conſervant les mêmes dénominations que dans le Théorême

précédent, nous avons GIDE $= \frac{2AB \times GE}{AB + AF} = \frac{2ac}{a+b}$, (Fig. 16.)

Par le Corol. 2. du Théor. 7, on a BE $= \sqrt{(AB-AF) \times 2AB}$, donc 2 BE $=$ GBE $= 2\sqrt{(AB-AF) \times 2AB} = 2\sqrt{(a-b)\,2a} = 2\sqrt{2aa - 2ab}$.

Puisque GE $= 2$ FE $= c$, & que FE $= \sqrt{aa-bb}$ donc 2 FE $= 2\sqrt{aa-bb} = c$. Maintenant pour voir si GE. GBE :: GBE. GIDE. substituons les valeurs analytiques, & nous aurons en substituant tout de suite pour c sa valeur $2\sqrt{aa-bb}$, la proportion $2\sqrt{aa-bb}$. $2\sqrt{2aa-2ab}$ :: $2\sqrt{2aa-2ab}$. $\frac{4a\sqrt{aa-bb}}{a+b}$ de laquelle faisant le produit des extrêmes & celui des moyens, nous trouvons $\frac{8a \times (aa-bb)}{a+b} = 4 \times (2aa - 2ab)$ ou $\frac{8a \times \overline{a-b} \times \overline{a+b}}{a+b} = 8a \times \overline{a-b}$, qui sont visiblement deux quantités égales, le produit des extrêmes est donc égal à celui des moyens, donc, &c. C, Q, F, D.

THEOREME II.

Si l'on inscrit & circonscrit deux Poligones semblables, & que

l'on circonſcrive un autre Poligone avec le double de côtés. Les périmètres de ces trois Poligones ſeront en proportion harmonique. (Fig. 16.)

En conſervant les mêmes dénominations que dans le Théorême précédent, on trouvera LC $= \frac{2a\sqrt{aa-bb}}{b}$. GIDE $= \frac{4a\sqrt{aa-bb}}{a+b}$, GE $= 2\sqrt{aa-bb}$.

Pour prouver que les trois périmètres LC, GIDE, GE forment une proportion harmonique, il faut démontrer que le premier eſt au troiſième, comme l'excès du premier ſur le ſecond, eſt à l'excès du ſecond ſur le troiſième, c'eſt-à-dire, qu'on doit avoir la proportion $\frac{2a\sqrt{aa-bb}}{b} . 2\sqrt{aa-bb} :: \frac{2a\sqrt{aa-bb}}{b} - \frac{4a\sqrt{aa-bb}}{a+b} . \frac{4a\sqrt{aa-bb}}{a+b} - 2\sqrt{aa-bb}$, ou bien en diviſant par $\sqrt{aa-bb}$, $\frac{2a}{b} . 2 :: \frac{2a}{b} - \frac{4a}{a+b} . \frac{4a}{a+b} - 2$. Or il y a véritablement proportion, car en multipliant tous les termes par b, & enſuite par $a+b$ on aura $2a^2 + 2ab . 2ab + 2b^2 :: 2a^2 - 2ab . 2ab - 2b^2$ dont tous les termes étant diviſés par 2 donne $a^2 + ab . ab + b^2 :: a^2 - ab . ab - b^2$, de laquelle faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, on trouvera de

part & d'autre la quantité $a^3 b - a b^3$, ces deux produits ſont donc égaux, il y a donc proportion, C, Q, F, D.

Théorie générale des Figures Iſſopérimètres.

THEOREME 12.

Le Cercle eſt moyen proportionel géométrique entre un Poligone quelconque qui lui eſt circonſcrit, eſt un Poligone ſemblable iſſopérimètre au Cercle. (*a*)

DEMONSTRATION.

Puisque les deux Poligones de l'hyp. ſont ſemblables, ils ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues, ou ce qui eſt la même choſe, comme les quarrés de leurs apothèmes, or le Poligone circonſcrit a pour apothème le rayon, donc ces deux Poligones ſont entr'eux, comme le quarré du rayon, eſt au quarré de l'apothème du Poligone iſſopérimètre au Cercle.

Le Cercle, & le Poligone qui lui eſt iſſopérimètre ayant leur contour ou circuit égaux, ſont entr'eux comme leurs apothèmes, or l'apothème du Cercle eſt le rayon, & l'apothème du Poligone iſſopérimètre eſt le même que ci-devant; ainſi puiſque le rapport du Poligone circonſcrit, a ſon ſemblable iſſopérimètre au Cercle, eſt le même que celui du quarré du rayon, au quarré de l'apothème

(*a*) J'ai lû ce Théorême dans quelque Ouvrage, ſans que je puiſſe me rappeller où, je le place ici pour les conſéquences qui en vont réſulter.

du Poligone iſſopérimètre. Et que le rapport du Cercle a ſon Poligone iſſopérimètre, eſt le même que celui du rayon, à l'apothème, il s'enſuit que la raiſon du Poligone circonſcrit au Poligone iſſopérimètre, eſt doublée de celle du Cercle au Poligone iſſopérimètre, donc, le Cercle eſt moyen proportionel entre le Poligone qui lui eſt circonſcrit, & le Poligone qui lui eſt iſſopérmètre. C, Q, F, D.

COROLAIRE 1. Il ſuit évidemment de ce Théorême, que l'aire du Cercle, eſt moyenne proportionelle géométrique entre le triangle équilatéral qui lui eſt circonſcrit, & le triangle équilatéral qui lui eſt iſſopérimètre.

COROLAIRE 2. Par la même raiſon, l'aire du Cercle eſt moyenne proportionelle géométrique entre le quarré circonſcrit, & le quarré qui lui eſt iſſopérimètre. Et ainſi de ſuite pour tous les autres Poligones circonſcrits, & leurs ſemblables iſſopérimètres au Cercle.

THEOREME 13.

Les Poligones reguliers iſſopérimètres à un Cercle, ſont en raiſon inverſe de leurs Poligones ſemblables circonſcrits au même Cercle.

Pour démontrer cette importante vérité, nommons par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, &c. les Poligones reguliers de trois, quatre, cinq, ſix, ſept, &c. côtés, circonſcrits au Cercle; nommons auſſi par les lettres *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, &c. les Poligones reguliers ſemblables aux précédens,

cédens, & qui ſont en même temps iſſopérimètres au Cercle, nommons auſſi C la ſurface du Cercle.

Par le Théorême précédent nous avons les proportions $a. C :: C. f$, $b. C :: C. g$, $c. C :: C. h$, $d. C :: C. i$, $e. C :: C. k.$ &c qui nous donnent les égalités $af = C^2$, $bg = C^2$, $ch = C^2$, $di = C^2$, $ck = C^2$, & comme toutes les quantités qui ſont égales à une même quantité ſont égales entr'elles, on en forme ces nouvelles égalités, $af = bg$. $bg = ch$. $ch = di$, $di = ek$. d'où on tire les proportions que voici $f. g :: b. a$. $g. h :: c. b$, $h. i :: d. c$, $i\, k :: e. d$ &c. qui nous font voir que les Poligones réguliers iſſopérimètres au Cercle, ſont entr'eux dans la raiſon inverſe de leurs Poligones ſemblables circonſcrits.

COROLAIRE 1. Puisque les ſurfaces des Poligones réguliers circonſcrits à un Cercle, ſont entr'elles comme leurs périmètres, il s'enſuit que les Poligones réguliers iſſopérimètres à un Cercle, ſont en raiſon inverſe des périmètres de leurs Poligones ſemblables circonſcrits à ce même Cercle.

Par conſéquent, la ſurface du triangle équilatéral iſſopérimètre au Cercle, eſt à la ſurface du quarré iſſopérimètre du même Cercle, comme le périmètre du quarré circonſcrit à ce Cercle, eſt au périmètre du triangle équilatéral circonſcrit.

De même, la ſurface du triangle équilatéral iſſopérimètre au Cercle, eſt à la ſurface du Dodécagone auſſi iſſopérimètre à la même

figure, comme le périmètre du Dodecagone circonſcrit au Cercle, eſt au périmètre du triangle équilatéral circonſcrit.

ENFIN, l'aire de l'exagone iſſopérimètre au Cercle eſt à l'aire du Poligone regulier de vingt côtés auſſi iſſopérimètre à ce Cercle, comme le périmètre du Poligone régulier circonſcrit de vingt côtés eſt au périmètre de l'exagone circonſcrit.

COROLAIRE 2. Par tout ce qui vient d'être dit, il réſulte, que les raiſons inverſes qu'ont ſucceſſivement tous les périmètres des Poligones réguliers circonſcrits à un Cercle, ſont l'expreſſion des rapports qu'ont entr'elles, les ſurfaces des Poligones réguliers iſſopérimètres au Cercle, dont le nombre des côtés augmente ſucceſſivement juſqu'à devenir le Cercle.

COROLAIRE 3. Comme tous les Poligones réguliers iſſopérimètres au Cercle ſont néceſſairement iſſopérimètres entr'eux, & que de plus, le rapport qui exiſte entre deux Poligones iſſopérimètres qui ont chacun un certain nombre de côtés, mais différens l'un de l'autre, eſt le même que le rapport entre les ſurfaces de deux autres Poligones réguliers iſſopérimètres, qui ont le même nombre de côtés chacun à chacun, que les deux précédens, quoique plus petits ou plus grands. Il s'enſuit que l'accroiſſement ſucceſſif des périmètres de tous les Poligones réguliers circonſcrits à un Cercle, à meſure que le nombre de leurs côtés diminue, eſt l'image de l'accroiſſement des ſurfaces des Poligones iſſopérimètres, à meſure que

le nombre de leurs côtés augmente, & qu'ainsi les périmètres des Poligones réguliers circonscrits à un Cercle quelconque, sont l'échelle de graduation, dont la surface d'un Poligone régulier augmentera, par l'augmentation du nombre de ses côtés, en conservant toujours la même quantité de contour.

En prenant le Cercle pour le Poligone régulier circonscrit, qui a le plus grand nombre de côtés qu'il est possible. Et le triangle équilatéral circonscrit, pour le Poligone qui en a le moins possible. Il s'ensuit que le rapport de la circonférence au périmétre du triangle équilatéral qui lui est circonscrit, exprime le plus grand accroissement possible que peut recevoir une surface, en conservant son même contour.

Ceite propriété du Cercle, nous met en état de déterminer avec facilité, quelle seroit la surface d'un Cercle, dont la circonférence seroit égale au périmètre d'un quarré donné, car il est évident qu'on trouvera cette surface par cette proportion; la circonférence d'un Cercle pris à volonté, est au périmètre de son quarré circonscrit, comme la surface d'un quarré donné, est à celle du Cercle qui lui est issopérimètre. Or les trois premiers termes sont connus, on connoîtra donc par la regle de trois le quatrieme, & par conséquent on aura la surface du Cercle issopérimètre au quarré donné.

Supposant que l'on prenne un Cercle qui ait sept pieds de diamètre, sa circonférence en aura vingt-deux, à très-peu-près, & si le quarré donné est de 64 pieds quarrés, la proportion énoncée sera

celle-ci, 22. 28 :: 64. eſt à un quatriéme terme, que l'on trouve être $81 \frac{5}{11}$ pieds quarrés, par où l'on voit, que le contour du quarré qui renferme 64 pieds quarrés, en renfermera $81 \frac{5}{11}$ lorſqu'il aura la forme circulaire, ce qui eſt preſque un quart de plus.

COROLAIRE 4. Lorſqu'on voudra connoître le rapport de la ſurface d'un Poligone donné, à celle d'un autre Poligone d'un certain nombre de côtés, mais iſſopérimètre au premier, on calculera d'abord ſon angle au centre, puis on prendra la moitié de ſa valeur, enſuite on cherchera ſa tangente dans les tables des ſinus, que l'on multipliera par le double du nombre des côtés que doit avoir le nouveau Poligone, le produit ſera l'expreſſion du périmètre de ce Poligone circonſcrit. On trouvera de même le périmètre du ſecond Poligone, puis on ſera en état de faire la proportion, qui donne l'aire que doit avoir le ſecond Poligone demandé.

Il eſt vrai que l'on n'aura point à la rigueur géométrique, par les tangentes la vraie valeur des périmètres des Poligones circonſcrits, mais ce ſera à très-peu de choſe près, l'on évitera par ce moyen des calculs aſſez difficiles, & qui d'ailleurs ne pourroient guères être plus précis, à cauſe des incommenſurables qui accompagnent preſque toujours les périmètres des Poligones circonſcrits.

COROLAIRE 5. Puiſque par le Théorême 12. le Cercle eſt moyen proportionel géométrique entre les Poligones reguliers qui lui ſont circonſcrits, & leurs ſemblables iſſopérimétres au Cercle; & que tous les Poligones circonſcrits ſont plus grands que le Cercle,

le Cercle eſt à ſon tour, néceſſairement plus grand que tous les Poligones qui lui ſont iſſopérimétres, d'où nous pouvons conclure, que de tous les Poligones reguliers iſſopérimétres poſſibles, le Cercle eſt celui qui contient la plus grande ſurface.

COROLAIRE 6. Comme les Poligones circonſcrits, ont d'autant plus de ſurface, qu'ils ont moins de côtés, il arrive néceſſairement, que moins les Poligones iſſopérimétres au Cercle, ont de côtés, & moins auſſi ils ont de ſurface parce qu'ils ſont contenus par le Cercle, préciſément le même nombre de fois que le Cercle eſt contenu par les Poligones ſemblables qui lui ſont circonſcrits. D'où on peut conclure, que plus les Poligones iſſopérimétres ont de côtés, plus auſſi leur ſurface eſt grande, de ſorte que dans ce cas, le Cercle eſt le Maximum de ſurface, qu'un contour diſpoſé réguliérement peut renfermer, & que le triangle en eſt le Minimum.

THEOREME. 14.

Un ſolide quelconque circonſcrit à une ſphere, eſt à cette ſphere, en raiſon doublée de la raiſon de cette ſphere à un ſolide de même ſurface qu'elle, qui eſt ſemblable au ſolide circonſcrit.

DEMONSTRATION.

Puisque le ſolide de même ſurface que la ſphere, eſt ſuppoſé ſemblable au ſolide circonſcrit à cette même ſphere, & que les ſolides ſemblables ayant exactement les mêmes propriétés, ne différent abſolument entr'eux, que par leur grandeur ou quantité d'éten-

due. Il s'ensuit que le solide de même surface que la sphere, est aussi capable d'avoir une sphere qui lui soit inscrite. Or comme tout solide quelconque circonscrit à une sphere, a sa surface & sa solidité plus grande que celle de la sphere qui lui est inscrit, il s'ensuit que le solide égal en surface à celle de la sphere de l'hypothése, a sa surface & sa solidité plus considérable que la surface & la solidité de la sphere qui lui est inscrite, cette nouvelle sphere est donc moins grande que celle de l'hypothése, son rayon a donc aussi moins de longueur.

Nommons r le rayon de la sphere de l'hypothése, & S le rayon de la nouvelle sphere inscrite dans le solide de même surface que la première; puisque les solides circonscrits à ces deux spheres sont supposés semblables, leurs surfaces sont entr'elles comme les quarrés des rayons de leur sphere inscrite, c'est-à-dire, comme r^2. S^2. Or M. Zanotti a démontré que la surface d'un solide circonscrit, est à celle de sa sphere, comme la solidité renfermée par la première surface, est à la solidité renfermée par la seconde, donc le solide circonscrit à la première sphere, est à cette même sphere comme r^2. S^2, il nous reste maintenant à voir quel est le rapport qui existe entre la première sphere & le solide circonscrit à la seconde sphere.

En nommant m la surface de la première sphere, m exprimera aussi la surface du solide circonscrit à la seconde sphere. Or on sait que la solidité d'une sphere est égale au produit de sa surface par le

tiers de ſon rayon, la ſolidité de la première ſphere eſt donc exprimée par $\frac{mr}{3}$.

M. Zanotti ayant démontré que la ſolidité de tout corps circonſcrit à une ſphere, eſt egale au produit de la ſurface du corps circonſcrit par le tiers du rayon de la ſphere à laquelle il eſt circonſcrit, la ſolidité du corps circonſcrit à la ſeconde ſphere eſt donc égale au produit $\frac{mS}{3}$.

Comparant maintenant l'expreſſion $\frac{mr}{3}$ de la première ſphere, avec l'expreſſion $\frac{mS}{3}$ de la ſolidité du corps de même ſurface que la première ſphere, nous aurons $\frac{mr}{3} . \frac{mS}{3} :: r. S$, proportion qui nous fait connoître que la ſphere de l'hypotheſe, eſt au ſolide de même ſurface qu'elle, comme $r. S$.

Ainsi puiſque le ſolide circonſcrit à la ſphere de l'hypothéſe, eſt à cette ſphere :: $r^2 . S^2$, & que cette même ſphere eſt au ſolide ſemblable de même ſurface qu'elle :: $r. S$, & que la première raiſon $r^2 . S^2$. eſt doublée de la raiſon de $r. S$. Donc &c. C, Q, F, D.

On doit obſerver que l'énoncé de ce Théorême, convient également à tous les ſolides circonſcrits, à ceux qui ſont terminés par des ſurfaces planes comme à ceux qui le ſont par des ſurfaces courbes.

COROLAIRE I.

Il eſt évident, que plus le ſolide circonſcrit contiendra la ſphere, plus auſſi la ſphere contiendra le ſolide ſemblable, qui aura ſa même quantité de ſurface, parce que la raiſon doublée qui a lieu entre le ſolide circonſcrit & la ſphere devenant plus grande, rend auſſi plus grande, la raiſon qui ſe trouve entre la ſphere, & le ſolide ſemblable de même ſurface que cette ſphere.

D'où il ſuit évidemment, que plus le ſolide circonſcrit approchera de l'égalité avec la ſphere, plus auſſi le ſolide de même ſurface que la ſphere approchera de l'égalité de la ſphere, mais comme un ſolide circonſcrit ne peut approcher de l'égalité avec la ſphere, qu'à meſure qu'il eſt déterminé par un plus grand nombre de faces, qui ſont des ſurfaces planes ou courbes, de même, le ſolide égal en ſurface à celle de la ſphere, ne peut approcher ſa ſolidité d'être égale à la ſolidité de la ſphere, qu'à meſure qu'il eſt terminé par un plus grand nombre de faces planes ou courbes, par la raiſon qu'il doit toujours être ſemblable au ſolide circonſcrit.

Or la limite d'accroiſſement du nombre des faces du ſolide circonſcrit, eſt celui du nombre des faces de la ſphere, donc la limite d'accroiſſement en ſolidité des corps de même ſurface, eſt auſſi la ſphere, parconſequent la ſphere eſt de tous les ſolides de même ſurface, celui qui renferme la plus grande ſolidité.

Par

Par ce raiſonnement on peut encore conclure, qu'en général, les corps enveloppés d'une même quantité de ſurface, contiennent plus de ſolidité, à meſure qu'ils ont un plus grand nombre de côtés.

REMARQUE.

On doit encore faire attention, que le premier ſolide régulier terminé par des ſurfaces planes, que l'on peut circonſcrire à une ſphere, eſt le Tetraedre borné par quatre triangles équilatéraux. Et que le premier ſolide enveloppé de ſurfaces courbes que l'on peut circonſcrire à la même ſphere, eſt le Cone équilatéral.

C'est une choſe connue des Géomètres, que moins les ſolides circonſcrits ont de côtés, plus leur ſolidité eſt conſidérable. Donc le Tetraedre & le Cone équilatéral ſont chacun dans leur claſſe le plus grand corps qu'il eſt poſſible de circonſcrire à une ſphere, & leur rapport à la ſphere, le plus grand poſſible.

COROLAIRE 2.

Si l'on nomme r le rayon de la ſphere, & que l'on calcule la ſurface du Tetraedre qui lui eſt circonſcrit, on trouvera que cette ſurface eſt exprimée par la quantité $18\, r^2 \sqrt{3}$. Nommant c la circonférence du rayon r, la ſurface de la ſphere ſera exprimée par $2cr$, or comme la ſurface d'un corps circonſcrit, eſt à la ſurface de la ſphere, dans le même rapport que leur ſolidité, nous pouvons conclure, que la ſolidité du Tetraedre circonſcrit, eſt à celle de la

ſphere :: $18 r^2 \sqrt{3}$. 2cr. Or comme ce rapport eſt doublé de celui qui a lieu entre la ſphere & le Tetraedre de même ſurface qu'elle, ce dernier rapport eſt donc exprimé par $\sqrt{18 r^2 \sqrt{3}} . \sqrt{2cr}$.

Ce que ce rapport a d'important, c'eſt d'être celui de la plus grande à la moindre ſolidité qu'une même quantité de ſurface plane peut renfermer, aves les formes regulieres les plus éloignées l'une de l'autre qu'il eſt poſſible.

THEOREME 15.

Les ſolides de même ſurface qu'une ſphere, ſont entr'eux en raiſon inverſe ſoudoublée, de la raiſon qui ſe trouve entre les ſolides qui leur ſont ſemblables, & qui ſont en même tems circonſcrits à la même ſphere.

DEMONSTRATION.

Nommons par les lettres capitales A, B, C, D, E, &c.... S. Toute la ſuite des ſolides circonſcrits à la ſphere, depuis le Tetraedre, qui eſt le ſolide regulier terminé par le plus petit nombre poſſible de ſurfaces planes, & dont les ſuivans ont ſucceſſivement un plus grand nombre de faces, ſoit planes, ou courbes, dont leur limite eſt la ſphere repreſentée par S, parce qu'elle eſt le ſolide borné par le plus grand nombre de faces planes ou courbes, ſuivant le coup-d'œil ſous laquelle on la conſidere.

Nommons auſſi la ſuite des ſolides de même ſurface que la ſphere,

& qui sont de plus semblables aux circonscrits, par les lettres munuscules a, b, c, d, e, &c. S. laquelle commence aussi par le Tetraedre, & finit à la sphere.

Par le Théorême précédent, nous avons les proportions, $\sqrt{A}$. $\sqrt{S}$:: S. a, $\sqrt{B}$. $\sqrt{S}$:: S. b, $\sqrt{C}$. $\sqrt{S}$:: S. c, $\sqrt{D}$. $\sqrt{S}$:: S. d, $\sqrt{E}$ $\sqrt{S}$:: S. e, &c. qui donnent, en faisant le produit des extrêmes & celui des moyens, les égalités suivantes $a\sqrt{A} = S\sqrt{S}$, $b\sqrt{B} = S\sqrt{S}$, $c\sqrt{C} = S\sqrt{S}$, $d\sqrt{D} = S\sqrt{S}$, $e\sqrt{E} = S\sqrt{S}$.... &c. qui ayant toutes la même quantité pour second membre, font connoître que les premiers membres sont tous égaux, & qu'ainsi on peut former ces nouvelles égalités $a\sqrt{A} = b\sqrt{B}$, $b\sqrt{B} = c\sqrt{C}$, $c\sqrt{C} = d\sqrt{D}$, $d\sqrt{D} = e\sqrt{E}$..... &c. desquelles formant des proportions on aura $a.b$:: $\sqrt{B}$. $\sqrt{A}$, $b.c$:: $\sqrt{C}$. $\sqrt{B}$, $c.d$:: $\sqrt{D}$. $\sqrt{C}$, $d.e$:: $\sqrt{E}$. $\sqrt{D}$,.... &c. C, Q, F, D.

COROLAIRE I.

Si l'on veut déterminer le rapport qui se trouve entre le Tetraedre de même surface que la sphere, & le cube aussi de même surface que la sphere, on calculera la surface du Tetraedre circonscrit, que l'on trouvera être $18\,r^2\sqrt{3}$, on cherchera pareillement celle du cube circonscrit, qui est $24\,r^2$. Et comme les solides circonscrits

à une même ſphere, ont leurs ſolidités dans le même rapport que leurs ſurfaces, on conclura que ces deux ſolides ſont entr'eux :: 18 $r^2\sqrt{3}$. $24r^2$, ou bien en ſimplifiant :: $3\sqrt{3}$. 4.

Mais puiſque les ſolides ſemblables de même ſurface que la ſphere, ſont, en vertu du Théorême, dans la raiſon inverſe ſoudoublée des ſolides circonſcrits, donc le Tetraedre de même ſurface que la ſphere, eſt au Cube de même ſurface :: $\sqrt{4}$. $\sqrt{3\sqrt{3}}$.

COROLAIRE 2.

Si l'on étoit curieux de connoître le rapport qui ſe trouve entre le Cone équilatéral de même ſurface que la ſphere, & le Cylindre qui a cette même ſurface, on calculeroit les ſurfaces des deux corps ſemblables circonſcrits à cette ſphere, & comme on trouveroit la ſurface du premier corps, exprimée par $\frac{9cr}{2}$, & celle du ſecond corps par $3cr$, on conclura que les ſolidités de ces deux corps, ont entr'elles le rapport de $\frac{9cr}{2}$. $3cr$, lequel étant ſimplifié devient celui de 3. 2.

Mais comme en vertu du Théorême, les ſolides de même ſurface que la ſphere, ſont en raiſon inverſe ſoudoublée de leurs ſolides ſemblables circonſcrits, on conclura, que le Cone équilatéral de même ſurface que la ſphere, eſt au Cylindre qui poſſéde auſſi la même quantité de ſurface que la ſphere, :: $\sqrt{2}$. $\sqrt{3}$.

THEOREME 16.

Le Cone équilatéral circonscrit, le Cylindre circonscrit, la sphere, & le Cone équilatéral de même surface que la sphere, ont leurs solidités en progression géométrique.

DEMONSTRATION.

Puisque le Cone équilatéral circonscrit, le Cylindre circonscrit & la sphere sont en proportion continue, la raison qui se trouve entre le premier & le second, ou entre le second & le troisième de ces solides, est soudoublée de la raison qui se trouve entre le premier & le troisième, c'est-à-dire entre le Cone équilatéral & la sphere. Mais par le Théorême précédent, la raison de la sphere au Cone équilatéral de même surface que la dite sphere, est aussi soudoublée de la raison du Cone équilatéral circonscrit, au solide de la sphere ; or comme toutes les raisons qui sont soudoublées d'une même raison, sont nécessairement égales. Donc, les raisons qu'ont successivement entr'eux, le Cone équilatéral circonscrit, le Cylindre circonscrit, la sphere, & le Cone équilateral de même surface que la sphere, sont toutes égales, parconséquent les solidités de ces quatre corps sont en progression. C, Q, F, D.

COROLAIRE

Il résulte de ce Théorême, que le Cone équilatéral de même surface que la sphere, est à la sphere ; ce que la sphere est au Cylin-

dre qui lui est circonscrit: Or ce dernier rapport est celui de 2. 3, donc le Cone équilatéral de même surface que la sphere, est à la sphere:: 2. 3.

MAIS nous avons vû, Corolaire 2. du Théorême 15, que le rapport du Cone équilatéral de même surface que la sphere, est au Cylindre aussi de même surface que la sphere comme $\sqrt{2}$. $\sqrt{3}$. or cette raison est soudoublée de la raison 2. 3 qui a lieu entre le Cone équilatéral de même surface que la sphere, & la sphere, parconséquent ces trois corps, la sphere, le Cylindre de même surface que la sphere, & le Cone équilatéral de même surface que la sphere, sont en proportion continue.

Nous terminons ici, pour le présent, les propriétés des solides circonscrits à la sphere, relativement aux solides qui ont la même quantité de superficie que la même sphere, quoique nous soyons bien convaincu que le sujet n'est point épuisé, sur-tout à l'égard des solides inscrits, qui certainement ont autant de belles propriétés à l'égard de la sphere, que leurs semblables les circonscrits.

AYANT oublié de faire connoître, en son lieu, combien le Théorême 1. de ce Coup d'Essai, peut servir à simplifier certaines démonstrations trop compliquées, nous en allons donner un exemple, sur l'une des plus belles propriétés du Cercle, publiée en 1620 par *Snellius*.

THEOREME 17.

L'AIRE du Dodécagone inscrit dans un Cercle, est précisément égale à trois fois le quarré du rayon du Cercle dans lequel il est inscrit.

DEMONSTRATION.

En nommant r le rayon du Cercle dans lequel le Dodécagone est inscrit, le périmètre de l'exagone inscrit à ce même Cercle sera $6r$, or par le Théorême 1. en multipliant le périmètre $6r$, par $\frac{r}{2}$ moitié du rayon, le produit $3r^2$ est l'aire du Dodécagone inscrit, puisqu'il a le double de côtés que l'exagone, mais le produit $3r^2$ est le triple du quarré r^2 du rayon r, donc &c. C, Q, F, D.

COROLAIRE 1.

Le quarré du côté du triangle équilatéral inscrit dans un Cercle, étant triple du quarré du rayon de ce même Cercle. Il s'ensuit; que le quarré du côté du triangle équilatéral inscrit dans un Cercle, est égal à la surface du Dodécagone inscrit dans le même Cercle.

COROLAIRE 2.

Il suit de-là, que lorsqu'on voudra construire un Dodécagone regulier, qui soit égal à une surface donnée, on n'aura qu'à reduire cette surface en quarré, construire sur le côté de ce quarré un triangle équilatéral, auquel on circonscrira un Cercle, puis on inscrira dans ce Cercle un Dodécagone regulier, qui sera égal à la surface proposée.

Observation sur le Cercle.

A propos du Cercle, j'ai observé que ceux qui étudient la

Géométrie, sont surpris de ce qu'on exige d'eux, qu'ils considerent cette figure, comme un Poligone regulier d'une infinité de côtés infiniment petits, lorsqu'on veut leur démontrer qu'un Cercle est égal en surface à un triangle dont la base est égale à sa circonférence, & la hauteur à son rayon. Ceux qui ont l'esprit subtil & pénétrant, repondent à la personne qui les enseigne, comment voulez-vous qu'il soit possible que je considére le Cercle sous ce point de vûe, puisque par sa définition, tous les points de la circonférence sont également éloignés du centre, & qu'une ligne droite ne peut avoir absolument que deux de ses points, également éloignés d'un même point. La difficulté me paroit bonne, & à moi - même il m'a toujours paru singulier, que l'on regarde les lignes courbes comme composées de lignes droites infiniment petites, mais après avoir beaucoup refléchi sur cette manière de considérer les lignes courbes, j'ai compris que ce n'est qu'une hypothése dont on se sert, pour comparer les lignes courbes aux lignes droites, & les surfaces curvilignes à celles qui sont rectilignes, jusqu'à ce qu'on ait découvert le moyen de faire ces comparaisons, en considérant les lignes courbes selon ce qu'elles sont, c'est-à-dire, comme n'étant point composées de lignes droites.

L'hypothese des lignes courbes considérées comme des Poligones, à cela de fâcheux, qu'elle laisse dans l'esprit le doute, que les conséquences qu'on en tire pourroient bien n'être pas rigoureusement vraies, c'est pour cette raison que j'ai cherché le moyen de démon-

trer

TROISIÉME
COUP D'ESSAI
GÉOMÉTRIQUE.
SOLUTION ILLUSOIRE
DU FAMEUX PROBLEME DE LA QUADRATURE
DU CERCLE.

trer d'une manière rigoureuſe, que le Cercle eſt égal à un triangle, dont la baſe eſt égale en longueur à la circonférence conſidérée comme poſitivement courbe, & dont la hauteur eſt égale au rayon, voici cette démonſtration.

Supposons (Fig. 22.) deux lignes droites égales AB, EF, ſuppoſons de plus, que ces deux lignes commencent à ſe mouvoir en même temps, mais que la première AB ſe meuve parallélement à elle-même, & que la ſeconde EF tourne autour de ſon extrêmité F, de manière que ſon autre extrêmité E, ait la vîteſſe commune à chacun des points de la première ligne AB, il eſt évident que ſi le mouvement de ces deux lignes ceſſe précifément en même-temps, lorſque l'extrêmité E aura décrit la circonférence EGHIE, que les extrêmités B & E auront tracé des longueurs égales, deſorte que la première B ayant tracé la droite BC, la ſeconde E aura tracé la circonférence EGHIE, parconſéquent la droite BC ſera néceſſairement égale à la circonférence EGHIE, par la raiſon qu'en des temps égaux, & avec des vîteſſes égales, les eſpaces parcourus ſont de toute néceſſité égaux entr'eux.

Rendons-nous maintenant attentifs aux effets qui réſultent du mouvement des deux lignes AB, EF, on voit clairement que la ligne AB trace le rectangle ABCD, précifément dans le même temps que ſon extrêmité B trace la ligne droite BC, & que la droite EF trace le Cercle x, dans le temps que ſon extrêmité E décrit la circonférence EGHIE, or la ligne droite BC & la circonférence EGHIE étant tracés dans le même temps, le rectangle ABCD & le Cercle x ſont auſſi tracés dans le même temps.

K

deux dénominateurs c, d. Car de l'équation $\frac{a}{c} = \frac{bb}{dd}$ on tire $add = bbc$, puis en divisant les deux membres par a & ensuite par c, on trouve $\frac{dd}{c} = \frac{bb}{a}$, C, Q, F, D.

4.

COROLAIRE 3. Il suit naturellement de ce qui précéde, que si on a deux fractions ou quantités telles, que la premiére soit égale au quarré de la seconde. Que la fraction qui leur sera troisiéme proportionelle, aura pour numérateur & pour dénominateur, une quantité qui sera également troisiéme proportionelle des deux numérateurs, & des deux dénominateurs, pourvû qu'elle soit déduite par la nature du sujet, des relations qu'ont entr'eux les numérateurs & dénominateurs des deux fractions données.

5.

LEMME 2. L'Apothême du triangle équilatéral inscrit, est égal à la moitié du rayon. (Fig. 19.)

DÉMONSTRATION. Tirez par le centre A la perpendiculaire AD sur un des côtés BC du triangle équilatéral inscrit BCF, prolongée jusqu'à la circonférence en E.

Puisque par l'hypothèse BC est la corde d'un arc BEC qui est la troisiéme partie de la circonférence, les arcs BE, CE en sont donc

chacun la sixième partie, ainsi les Cordes CE, BE sont chacunes égales au rayon, donc AC = CE & AB = BE, les extrêmités B, C du côté BC sont donc également éloignées des extrêmités A, E, du rayon AE, la ligne BC divise donc AE en deux parties égales en D, donc AD = DE donc $AD = \frac{AE}{2}$, C, Q, F, D.

COROLAIRE. Si le rayon $AE = a$, on aura $AD = \frac{a}{2}$

6.

LEMME 3. L'Apothême (Fig. 20.) du quarré inscrit, est égal à la racine quarrée de la moitié du quarré du rayon.

Sur le côté BC du quarré inscrit ABCD, soit mené du centre E la perpendiculaire EF, & de ce même centre, soit tiré aux extrêmités B, C, les rayons BE, CE.

DÉMONSTRATION. Le triangle BEC est rectangle, aussi-bien qu'isocelle, puisque l'arc BC qui sert de mesure à l'angle BEC, est le quart de la circonférence, (par l'hyp.) & que les deux côtés BE & EC sont égaux, parce qu'ils sont tous les deux rayons du même Cercle, ainsi $\overline{BC}^2 = 2\overline{BE}^2$

Le triangle rectangle BFE est aussi isocelle, puisque l'angle BFE est droit, & que l'angle EBF est demi-droit, donc l'angle BEF est aussi demi-droit, donc EF = BF. Mais le point E étant également distant

TROISIÉME COUP

D'ESSAI GÉOMÉTRIQUE.

Solution Illusoire du fameux Problême de la Quadrature du Cercle.

I.

LEMME 1. Si on prend une troisième proportionelle aux numérateurs de deux fractions données $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$. Elle sera numérateur d'une fraction troisième proportionelle des deux fractions données, dont le dénominateur sera aussi troisième proportionel de leurs dénominateurs.

DÉMONSTRATION. La troisième proportionelle des deux numérateurs a, b, est $\frac{bb}{a}$, celle des dénominateurs c, d, est $\frac{dd}{c}$ ainsi $\frac{\frac{bb}{a}}{\frac{dd}{c}}$ doit donc être égale à la troisième proportionelle $\frac{bbc}{add}$ des deux

diſtant des extrêmités B, C, de BC, ou à BF = FC, donc $EF = \frac{BC}{2}$, donc $\overline{EF}^2 = \frac{\overline{BC}^2}{4}$, & ſubſtituant dans cette dernière équation pour $\overline{BC}^2$ ſa valeur $2\overline{BE}^2$, on aura $\overline{EF}^2 = \frac{2\overline{BE}^2}{4} = \frac{\overline{BE}^2}{2}$, donc $EF = \sqrt{\frac{\overline{BE}^2}{2}}$, C, Q, F, D.

COROLAIRE. Si on ſuppoſe le rayon $BE = a$, on aura $EF \sqrt{\frac{aa}{2}}$.

7.

THEOREME I. La circonférence du Cercle eſt troiſième proportionelle aux périmètres du triangle équilatéral & du quarré circonſcrits, ou bien à ceux du triangle équilatéral & du quarré inſcrits.

NOMMONS les périmètres des Poligones réguliers circonſcrits de 3. 4. 5. 6. 7 &c. côtés, incluſivement juſques à la circonférence du Cercle, par les lettres A, B, C, D, E, &c. Les périmètres des Poligones ſemblables inſcrits de 3, 4, 5, 6, 7 &c. côtés incluſivement juſques à la circonférence, par les lettres M, N, P, Q, R, &c. Nommons auſſi les perpendiculaires Apothêmes des derniers Poligones, par les lettres munuſcules *m*, *n*, *p*, *q*, *r*, &c. Soit encore nommé le rayon du Cercle, $= a$ & G ſa circonférence.

IL eſt d'abord très-évident, que les périmètres des Poligones circonſcrits, forment entr'eux une ſérie décroiſſante A, B, C, D, E, &c.... G juſques à la circonférence G qui eſt ſa limite.

On voit de même, que les périmètres des Poligones réguliers inſcrits, forment entr'eux une ſérie croiſſante M, N, P, Q, R, ... G qui ſe termine à la circonférence G. & que leurs apothêmes m, n, p, q, r, ... a, en font auſſi une croiſſante qui finit au rayon.

Presentement, ſi on diviſe les termes de la ſérie A, B, C, D, E, ... G, par les termes correſpondans de la ſérie M, N, P, Q, R, ... G, nous aurons la ſérie fractionaire $\frac{A}{M}, \frac{B}{N}, \frac{C}{P}, \frac{D}{Q}, \frac{E}{R}, \ldots \frac{G}{G}$, dont les termes expriment les rapports des périmètres des Poligones circonſcrits, aux périmètres des Poligones ſemblables inſcrits.

Qu'on ſe rappelle maintenant ce Théorême; que le périmètre d'un Poligone quelconque circonſcrit, eſt au périmètre de ſon ſemblable inſcrit, comme le rayon eſt à l'Apothême de l'inſcrit, & l'on aura les proportions ſuivantes, A. M :: a. m, B. N :: a. n, C. P :: a. p, D. Q :: a. q, E. R :: a. r, &c. d'où on tire les équations $\frac{A}{M} = \frac{a}{m}$, $\frac{B}{N} = \frac{a}{n}$, $\frac{C}{P} = \frac{a}{p}$, $\frac{D}{Q} = \frac{a}{q}$, $\frac{E}{R} = \frac{a}{r}$ &c. par leſquelles on voit, que chaque terme de la ſérie fractionaire $\frac{A}{M}, \frac{B}{N}, \frac{C}{P}, \frac{D}{Q}, \frac{E}{R} \ldots \frac{G}{G}$ eſt parfaitement égal au terme correſpondant de la ſérie $\frac{a}{m}, \frac{a}{n}, \frac{a}{p}, \frac{a}{q}, \frac{a}{r}, \frac{a}{s} \ldots \frac{a}{a}$, & qu'ainſi tout ce que

nous démontrerons des termes de la dernière, sera aussi démontré pour les termes correspondans de la première.

Tout cela bien considéré, si on substitue pour les deux premiers Apothêmes, m, n, leurs valeurs $\frac{a}{2}$; $\sqrt{\frac{aa}{2}}$ dans la dernière série, elle aura cette forme $\frac{a}{\frac{a}{2}}$; $\frac{a}{\sqrt{\frac{aa}{2}}}$, $\frac{a}{p}$, $\frac{a}{q}$, $\frac{a}{r}$, $\frac{a}{s}$.... $\frac{a}{a}$, dans laquelle on voit que son premier terme $\frac{a}{\frac{a}{2}}$, est égal au quarré $\frac{aa}{\frac{aa}{2}}$ du second terme $\frac{a}{\sqrt{\frac{aa}{2}}}$, & que ses deux premiers termes $\frac{a}{\frac{a}{2}}$, $\frac{a}{\sqrt{\frac{aa}{2}}}$ sont en proportion continue avec le dernier $\frac{a}{a}$, le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens. Donc en substituant pour ces trois termes, leurs correspondans $\frac{A}{M}$, $\frac{B}{N}$, $\frac{G}{G}$ de la première série, nous aurons l'équation $\frac{A}{M} = \frac{B^2}{N^2}$, & la proportion $\frac{A}{M}, \frac{B}{N} :: \frac{B}{N} . \frac{G}{G}$,

Observez maintenant, que par la nature de la série $\frac{A}{M}$, $\frac{B}{N}$, $\frac{C}{P}$, $\frac{D}{Q}$, $\frac{R}{S}$.... $\frac{G}{G}$, la valeur de G est également déduite des rap-

ports ſucceſſifs qui règnent entre les numérateurs, & entre les dénominateurs, & que par cette loi, ſa valeur eſt néceſſairement le réſultat des rélations qu'ont entr'eux les numérateurs A, B, & les dénominateurs M, N, ainſi Corolaire 3. puiſqu'on a la proportion $\frac{A}{M} . \frac{B}{N} :: \frac{B}{N} . \frac{G}{G}$, & l'équation $\frac{A}{M} = \frac{B^2}{N^2}$, donc G eſt également troiſième proportionelle des numérateurs A, B, & des dénominateurs, M, N, mais G déſigne la circonférence, donc, &c. C, Q, F, D.

8.

THEOREME 2. La ſurface du Cercle eſt troiſième proportionelle aux aires des Poligones circonſcrits, qui ſont le triangle équilatéral, & le quarré. Ou bien au triangle équilatéral & au quarré inſcrits.

SUPPOSONS d'abord que les lettres A, B, C, D, E, ... G expriment les aires des Poligones circonſcrits, incluſivement juſqu'au Cercle exprimé par G. Et les aires des Poligones réguliers ſemblables inſcrits par les lettres M, N, P, Q, R, ... G. Soient auſſi les Apothêmes des derniers exprimés par les lettres munuſcules *m*, *n*, *p*, *q*, *r*, *s* .... *a*, le rayon étant toujours exprimé par *a*.

DÉMONSTRATION. Puiſque l'aire d'un Poligone circonſcrit quelconque, eſt à celle d'un Poligone inſcrit ſemblable, comme le quarré du rayon, eſt au quarré de l'Apothême de l'inſcrit, donc

A. M :: $aa. mm$, B. N :: $aa. nn$, C. P :: $aa. pp$, D. Q :: $aa. qq$, E. R :: $aa. rr$, &c. Donc $\frac{A}{M} = \frac{aa}{mm}$, $\frac{B}{N} = \frac{aa}{nn}$, $\frac{C}{P} = \frac{aa}{pp}$, $\frac{D}{Q} = \frac{aa}{qq}$, $\frac{E}{R} = \frac{aa}{rr}$ &c. Ce qui montre que les termes de la série $\frac{A}{M}$, $\frac{B}{N}$, $\frac{C}{P}$, $\frac{D}{Q}$, ... $\frac{G}{G}$, sont égaux à ceux qui leur correspondent dans la série $\frac{aa}{mm}$, $\frac{aa}{nn}$, $\frac{aa}{pp}$, $\frac{aa}{qq}$, $\frac{aa}{rr}$, $\frac{aa}{ss}$ ..... $\frac{aa}{aa}$. Mais nous avons vû dans la démonstration du Théorême précédente, que $\frac{a}{m} . \frac{a}{n} :: \frac{a}{n} . \frac{a}{a}$, donc aussi $\frac{aa}{mm} . \frac{aa}{nn} :: \frac{aa}{nn} . \frac{aa}{aa}$. Nous avons encore vû que $\frac{a}{m} = \frac{aa}{nn}$, donc $\frac{aa}{mm} = \frac{aaaa}{nnnn}$. Donc $\frac{A}{M} . \frac{B}{N} :: \frac{B}{N} . \frac{G}{G}$, & $\frac{A}{M} = \frac{B^2}{N^2}$, ainsi Corolaire 3. G est également troisième proportionel des numérateurs A, B, & des dénominateurs M, N, c-à-d. le Cercle G, troisième proportionel du triangle équilatéral & du quarré inscrit, C, Q, F, D.

9.

COROLAIRE 1. Il est évident par le premier Théorême, que pour trouver géométriquement une ligne droite égale à la circonfé-

rence d'un Cercle donné, il faut prendre une troisiéme proportionelle aux périmètres du triangle équilatéral & du quarré inscrit.

10.

COROLAIRE 2. Il suit aussi du second Théorême, qu'on trouvera géométriquement l'aire d'un Cercle donné, en prenant une aire troisième proportionelle, à celle du triangle équilatéral & du quarré inscrit.

11.

Nous allons maintenant faire les calculs nécessaires pour trouver les expressions ou formules analytiques de la circonférence du Cercle, & de son aire. (Fig. 21.)

Soit FG le côté du triangle équilatéral inscrit, dont l'Apothême CD $= m$, & le rayon CB $=$ CA $= a$.

Par la propriété du Cercle, FD est moyenne proportionelle entre AD & DB, mais AD $=$ AC $+$ CD $= a + m$, & DB $=$ CB $-$ CD $= a - m$, donc $a + m$. FD:: FD. $a - m$, donc FD $= \sqrt{(aa - mm)}$, donc 6FD $= 6\sqrt{(aa-mm)}$, mais 6FD $=$ 3FG périmètre du triangle équilatéral inscrit, donc ce périmètre est exprimé par la quantité $6\sqrt{(aa-mm)}$.

En faisant la proportion $m.\ a::\ 6\sqrt{(aa-mm)}.\ x$, on trouve que le périmètre x du triangle équilatéral circonscrit, est exprimé par la quantité $\frac{6a}{m}\sqrt{(aa-mm)}$.

De même, si LM est le côté du quarré inscrit, son Apothême CE $= n$, donc AC $+$ CE $= a + n$, est EB $=$ CB $-$ CE $= a - n$ ainsi $a + n$. LE :: LE. $a - n$, donc LE $= \sqrt{(aa - nn)}$, donc 8LE $=$ $8\sqrt{(aa - nn)}$, mais 8LE $=$ 4LM périmètre du quarré inscrit, donc ce périmètre est exprimé par $8\sqrt{(aa - nn)}$.

La proportion $n. a :: 8\sqrt{(aa - nn)}. x$, nous donne le périmètre x du quarré circonscrit $= \frac{8a}{n} \sqrt{(aa - nn)}$.

12.

En faisant la proportion $6\sqrt{(aa - mm)}. 8\sqrt{(aa - nn)} :: 8\sqrt{(aa - nn)}$ x, on trouve que la troisième proportionelle x, au périmètre du triangle équilatéral & du quarré inscrit, est la quantité $\frac{64 \times (aa - nn)}{6\sqrt{(aa - mm)}}$, dans laquelle substituant les valeurs $\frac{a}{2}$, $\sqrt{\frac{aa}{2}}$, des lettres m, n, on a pour troisième proportionelle la quantité $\frac{64 \times (aa - \frac{aa}{2})}{6\sqrt{(aa - \frac{aa}{4})}} =$ $\frac{32\,aa}{6\sqrt{\frac{3aa}{4}}} = \frac{32\,aa}{3a\sqrt{3}} = \frac{32\,a}{3\sqrt{3}}$ ainsi la formule de la circonférence, est donc la quantité $\frac{32\,a}{3\sqrt{3}}$.

13.

Si on veut prendre une troisième proportionelle aux périmètres du triangle équilateral & du quarré circonscrit, on n'a qu'à faire la proportion $\frac{6a}{m}\sqrt{(aa-mm)}.\ \frac{8a}{n}\sqrt{(aa-nn)}::\frac{8a}{n}\sqrt{(aa-nn)}.\ x$,

on trouvera $x=\frac{\frac{64aa\times(aa-nn)}{nn}}{\frac{6a}{m}\sqrt{(aa-mm)}}=\frac{64\,aa}{6a\sqrt{3}}=\frac{32\,a}{3\sqrt{3}}$, quantité qui est la même que celle de l'article précédent.

14.

On sait que l'aire d'un Poligone régulier, est égale au produit de son périmètre par la moitié de son Apothême, ainsi l'aire du triangle équilatéral inscrit, est donc exprimée par la quantité $3m\sqrt{(aa-mm)}$, & celle du quarré inscrit par $4n\sqrt{(aa-nn)}\div$

Si on veut avoir l'expression de l'aire du Cercle, on n'a qu'à prendre (N°. 10.) la troisième proportionelle des deux quantités que nous venons de déterminer, ainsi $3m\sqrt{(aa-mm)}.\ 4n\sqrt{(aa-nn)}::$ $4n\sqrt{(aa-nn)}.\ x$ d'où on tire $x=\frac{16nn\times(aa-nn)}{3m\sqrt{(aa-mm)}}=\frac{16aa}{3\sqrt{3}}$, ensorte que l'aire d'un Cercle dont le rayon $=a$, est exprimée par la quantité $\frac{16aa}{3\sqrt{3}}$.

15.

15.

Cette ſolution eſt tellement illuſoire, que les réſultats qu'elle donne, ſont fort éloignés de la vérité, comme on peut facilement s'en convaincre. Mais on ne voit pas avec la même facilité, en quoi conſiſte le Paralogiſme de la démonſtration, c'eſt pour cette raiſon que je la publie, car c'eſt cela qui la rend importante, parce qu'elle fait connoître la néceſſité de bien approfondir la nature des raiſons dont on compoſe les démonſtrations. Si quelque foible Géomètre prétendoit, que notre démonſtration pêche, parce que l'infini entre dans les ſuites des rapports que nous employons, ou parce que le Cercle étant limité par une infinité de côtés infiniment petits, il y a une incommenſurabilité d'un certain ordre, qui rend le Cercle ou ſa circonférence incomparable avec les ſurfaces des Poligones inſcrits ou circonſcrits, ou avec leurs périmètres, nous les renverrions aux Lumules quarrables & aux Paraboles de tous les genres, ou les mêmes raiſons ont lieu, ſans qu'elles aient été un obſtacle à la découverte de leurs quadratures.

16.

Les recherches des Adeptes pour trouver la pierre philoſophale, ont enrichi la Chimie de quelques découvertes très-importantes pour la guériſon de pluſieurs maux, & pour d'autres objets qui étendent nos connoiſſances. Les Chercheurs du mouvement per-

pétuel ont inventé plusieurs machines très-utiles, ainsi les personnes qui ont la passion de faire ces deux sortes de recherches ne sont pour l'ordinaire blâmables, que parce qu'elles ont en vûe un objet chimérique auquel il leur est impossible d'atteindre, & plus encore, parce qu'elles ruinent leurs fortunes & leur santé. Au contraire, ceux qui suffisamment éclairés de tous les principes de Géométrie, font des tentatives pour découvrir la quadrature du Cercle, tendent au moins à trouver un objet qui n'est point encore démontré impossible, & qui d'ailleurs n'exige absolument aucune dépense, dont ils retirent cependant l'avantage de bien s'affermir dans les principes qu'ils ont appris, & le plus souvent d'apprendre par leurs recherches tout ce que la théorie des rapports a de plus subtil & de plus délicat à manier, ce qui les conduit à devenir de vrais Géomètres, quelquefois même à découvrir des Théorêmes d'une beauté peu ordinaire. Nous en allons donner un exemple à l'occasion de notre Solution illusoire, d'où nous avons tiré malgré sa fausseté, six propositions trés-vraies dont les quatres dernières, sont la continuation de la découverte du célébre Archimede sur les rapports du Cylindre à la sphere, les voici.

17.

1°. La troisième proportionelle aux périmètres du triangle équilatéral & du quarré circonscrits à un Cercle, est égale à la troisiéme proportionelle des périmètres du triangle équilatéral & du quarré inscrits à ce même Cercle.

2°. L'aire troisiéme proportionelle, aux aires du triangle équilatéral & du quarré circonscrit à un Cercle, est égale à l'aire qui est troisiéme proportionelle aux aires du triangle équilatéral & du quarré inscrits à ce Cercle.

3°. Les surfaces du Cone équilatéral & du Cylindre circonscrits à une sphere, sont en proportion continue avec la surface de cette sphere.

4°. Les surfaces du Cone équilatéral & du Cylindre équilatére inscrits, sont en proportion continue avec la surface de la sphere dans laquelle ils sont inscrits.

5°. Les solidités du Cone équilatéral & du Cylindre circonscrits à une sphere, sont en proportion continue avec la solidité de la même sphere.

6°. Les solidités du Cone équilatéral & du Cylindre équilatére inscrits dans une sphere, sont en proportion continue avec la solidité de la même sphere.

18.

Pour faire connoître la vérité de ces six propositions, nous supposons que nos Lecteurs savent déterminer par le seul rayon du Cercle pris pour module, les valeurs des périmètres & surfaces des triangles équilatéraux & des quarrés circonscrits & inscrits *&c.* Que le rayon du Cercle & sa circonférence étant donnés, on sçait déterminer les surfaces & les solidités des Cones & des Cylindres équilatéraux inscrits & circonscrits, ainsi que la surface & la solidité de la

ſphere, décrite par la révolution de ce Cercle autour de l'un de ſes diamètres. Cela ſuppoſé, voici les formules de toutes ces valeurs, le rayon étant exprimé par la lettre a, & ſa circonférence par c.

$6a\sqrt{3}$. Périmètre du triangle équilatéral circonſcrit.

$3aa\sqrt{3}$. Surface du même triangle.

$3a\sqrt{3}$. Périmètre du triangle équilatéral inſcrit.

$\frac{3aa}{4}\sqrt{3}$. Surface du même triangle.

$8a$. Périmètre du quarré circonſcrit.

$4aa$. Surface du même quarré.

$4a\sqrt{2}$. Périmètre du quarré inſcrit.

$2aa$. Surface du même quarré.

$\frac{9ac}{2}$. Surface totale du Cone équilatéral circonſcrit.

$\frac{3aac}{2}$. Solidité du même Corps.

$\frac{9ac}{8}$. Surface totale du Cone équilatéral inſcrit.

$\frac{3aac}{16}$. Solidité du même Corps.

$3ac$. Surface totale du Cylindre circonſcrit.

aac. Solidité du même Corps.

$\frac{3ac}{2}$. Surface totale du Cylindre inſcrit.

$\frac{aac}{4}\sqrt{2}$. Solidité du même Corps.

$2ac$. Surface de la Sphere.

$\frac{2aac}{3}$. Solidité de la Sphere.

Toutes ces quantités étant ainsi déterminées, on choisira celles qui sont énoncées dans chaque Théorême, & l'on en formera les proportions aussi énoncées.

Pour le 1. on trouvera que les troisiémes termes des deux proportions continues

$$6a\sqrt{3} : 8a :: 8a : x$$

$$3a\sqrt{3} : 4a\sqrt{2} :: 4a\sqrt{2} : x$$

sont la quantité $\frac{32a}{3\sqrt{3}}$. Et que ces deux proportions continues étant exprimées en nombre sont ces deux-ci.

$$\div\!\div\; 54 : 24\sqrt{3} : 32.$$

$$\div\!\div\; 27 : 12\sqrt{6} : 32.$$

Pour le 2. on aura les troisiémes termes des deux proportions continues,

$$3aa\sqrt{3} : 4aa :: 4aa : x.$$

$$\frac{3aa\sqrt{3}}{4} : 2aa :: 2aa : x.$$

égaux à la quantité $\frac{16aa}{3\sqrt{3}}$. Lesquelles étant exprimées en nombre, deviennent ces deux-ci,

∺ $27 : 12\sqrt{3} : 16.$

∺ $27 : 24\sqrt{3} : 64$

Pour le 3. on trouvera la proportion continue que voici, $\frac{9ac}{2} : 3ac :: 3ac : 2ac.$ Laquelle étant reduite en nombre devient ∺ $9 : 6 : 4.$

Pour le 4. on aura la proportion continue $\frac{9ac}{8} : \frac{3ac}{2} :: \frac{3ac}{2} : 2ac.$ Laquelle étant reduite en nombre devient ∺ $9 : 12 : 16.$

Pour le 5. on trouvera la proportion continue $\frac{3aac}{2} : aac :: aac : \frac{2aac}{3}.$ Laquelle étant reduite en nombre devient ∺ $9 : 6 : 4.$

Enfin, pour le 6. on aura la proportion continue $\frac{3aac}{16} : \frac{aac\sqrt{2}}{4}$ ∺ $\frac{aac\sqrt{2}}{4} : \frac{2aac}{3}.$ Laquelle étant reduite en nombre devient ∺ $9 : 12\sqrt{2} : 32.$

Une chose bien remarquable, après toutes ces proportions

continues. C'eſt que l'aire troiſiéme proportionelle aux aires de l'exagone & de l'octogone inſcrits, eſt égale aux aires troiſiémes proportionelles des aires du triangle équilatéral & du quarré inſcrits, & du triangle & du quarré circonſcrits, comme on peut aiſément s'en convaincre par le calcul.

Obſervations ſur les Equations des Sections Coniques.

I.

Je n'ai point encore vû, aucun Traité des Sections coniques, où l'on ait montré que les équations de ces trois courbes, ſont en proportion continue arithmétique. Ce qui aura ſans doute empêché les Géomètres de voir cette propriété, c'eſt que dans l'équation de la Parabole, il n'entre qu'une ligne de conſtante, au lieu que dans les équations de lEllypſe & de de l'Hyperbole il en entre deux. Il eſt cependant certain, que ſi l'on avoit ſuppoſé que les axes d'une Ellypſe fuſſent égaux chacun à chacun, à ceux d'une Hyperbole, & que le paramètre d'une Parabole fût le même que celui de ces deux courbes, qu'alors on auroit vû que les équations au paramètre de ces trois courbes ſont en proportion continue arithmétique.

J'avoue que cela étoit facile à faire, mais on ne voit pas tout ce qu'on peut voir, les vérités les plus importantes ſont ſouvent ſous nos yeux, ſans que notre pénétration les apperçoive. Voilà pourquoi les découvertes ſe font ordinairement par les moyens les

plus compliqués, & que leurs Auteurs laissent ordinairement à d'autres le soin de les simplifier. Si quelqu'un trouve donc qu'une découverte a été facile à faire, & qu'ainsi elle est de peu de valeur, nous pouvons leur repondre, pourquoi ne l'avez-vous pas faite.

2.

PRENONS maintenant les trois équations $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, $yy = px$, $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$ dont la première est celle de l'Ellypse, la seconde celle de la Parabole, & la troisième celle de l'Hyperbole, dans lesquelles a représente le grand axe, & b le petit axe, de l'Ellypse & de l'Hhyperbole en même-temps, prenons ensuite p, paramètre de la Parabole, troisiéme proportionel aux deux axes communs a & b, ensorte que l'on ait $a : b :: b : p = \frac{bb}{a}$, ensuite transposons pour p dans l'équation de la Parabole, sa valeur $\frac{bb}{a}$.

PAR cette substitution, nous aurons la proportion continue arithmétique que voici, $\frac{bb}{aa}(ax - xx) . \frac{bbx}{a} : \frac{bbx}{a} . \frac{bb}{aa}(ax + xx)$, car en faisant la somme des extrêmes & celle des moyens, on trouvera que ces deux sommes sont égales.

3.

3.

Il eſt préſentement certain; que les quarrés des ordonnées correſpondantes de l'Ellypſe, de la Parabole & de l'Hyperbole, ſont en proportion continue arithmétique, en ſuppoſant que ces trois courbes ont leurs abciſſes égales, que l'Ellypſe & l'Hyperbole ont les mêmes axes, & que le paramètre de la Parabole, eſt égal au paramètre du premier axe des deux autres courbes.

4.

Les trois équations $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, $yy = \frac{bbx}{aa}$, $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$ font voir, qu'à des abciſſes égales, l'ordonnée de l'Hyperbole, eſt plus grande que celle de la Parabole, & celle-ci, plus grande que celle de l'Ellypſe. Et que ces trois ordonnées correſpondantes, ſont entr'elles, comme les racines des termes de la proportion continue arithmétique $\frac{bb}{aa}(ax - xx) . \frac{bbx}{a} : \frac{bbx}{a} . \frac{bb}{aa}(ax + xx)$.

En ſuppoſant $b = a$, cette proportion continue arithmétique devient $ax - xx . ax : ax . ax + xx$, dont le premier terme eſt l'équation du Cercle, dont le diamètre $= a$. Le ſecond & le troi-

siéme les équations de la Parabole, & le quatriéme celle de l'Hyperbole équilatere, dont les deux axes sont égaux à la ligne représentée par la lettre a, où la proportion continue arithmétique est plus visible que dans la précédente.

5.

C'est par cette dernière proportion continue arithmétique, la plus simple qu'il est possible pour les Sections coniques, que l'on peut commencer un Traité analytique de ces courbes, où toutes leurs propriétés seroient immédiatement tirées de leur équation. Et comme ces trois équations sont formées par des quantités parfaitement semblables, on pourroit facilement comparer les formules de leurs propriétés analogues, comme celles de leurs tangentes, sécantes, normales, sounormales, &c. Par ces comparaisons très-simples, on parviendroit à découvrir des propriétés dont on ne s'est point douté jusqu'à présent.

Peut-etre prendra-t-on ceci pour une assertion qui n'a aucun fondement réel. Il faut donc, que nous fassions voir par un exemple frappant, que de la comparaison des trois équations, telles que nous les presentons, on peut en tirer une vérité inconnue & intéressante.

6.

Prenons pour cet effet, les trois équations $yy = ax - xx$, $yy = ax$, $yy = ax + xx$, dont la première est celle du Cercle,

la feconde celle de la Parabole, & la troifiéme celle de l'Hyperbole, que nous fuppofons avoir en même-temps les abciffes égales.

Comme les feconds membres de ces trois équations font en proportion continue arithmétique, leurs premiers membres le font auffi, parconféquent, il eft clair. *Que les quarrés des ordonnées correfpondantes, font en proportion continue arithmétique. Et que les ordonnées font entr'elles, comme les racines quarrées des termes de la même proportion continue arithmétique.*

7.

Ces obfervations, quoique bien fimples & bien claires, feroient cependant peu de chofe, il faut en faire d'autres plus importantes, qui aient le pouvoir de faire connoître tout le prix des comparaifons que nous propofons.

Il eft d'abord très-clair, que fi l'on fubftitue fucceffivement, dans les trois quantités $ax - xx$, ax, $ax + xx$, pour x, la fuite des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5.... &c. qu'on aura la fuite de toutes les proportions continues, que forment les quarrés des ordonnées correfpondantes du Cercle, de la Parabole, & de l'Hyperbole équilatere.

Que l'on s'imagine préfentement, que ces trois courbes font chacune une révolution complette autour de l'axe des abciffes, il eft evident, que ces courbes engendreront des folides de même

hauteur, puiſqu'on leur ſuppoſe des abciſſes égales, & que les ordonnées correſpondantes décriront des Cercles correſpondans.

Or comme les Cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons, les Cercles correſpondans de ces trois corps, ſont entr'eux comme les quarrés des ordonnées correſpondantes, mais ces quarrés ſont en proportion continue arithmétique, donc auſſi les Cercles correſpondans de ces trois ſolides, ſont en proportion continue arithmétique.

Mais ces trois ſolides étant ſuppoſés avoir des hauteurs égales, ſont néceſſairement compoſés d'un même nombre de tranches Cylindriques élémentaires correſpondantes, qui ont des hauteurs égales, ainſi, elles ſont entr'elles comme les Cercles qui leur ſervent de baſe, mais ces Cercles ſont en proportion continue arithmétique. Donc, les Cylindres élémentaires correſpondans de ces trois ſolides, ſont auſſi entr'eux en proportion continue arithmétique.

Or l'on doit ſavoir, & ſi on ne le ſait pas, on pourra facilement s'aſſurer. Que ſi l'on ajoûte les termes correſpondans de tant de proportions arithmétiques continues qu'on voudra. Que les ſommes qui en réſulteront, ſeront auſſi en proportion continue arithmétique. Donc dans le cas de notre proportion continue $\div$ $ax - xx.\ ax.\ ax + xx$, qui repréſente toutes les proportions continues arithmétiques des tranches élémentaires, la ſomme des tranches qui forment les premiers termes, compoſe la ſolidité de la ſphere, la

ſomme de tous les termes moyens, conſtitue la ſolidité du Paraboloïde, & la ſomme des troiſiémes termes celle de l'Hyperboloïde, parconſéquent, nous ſommes en droit de conclure. Que la ſphere, le Paraboloïde, & l'Hyperboloïde équilatere, ſont en proportion continue arithmétique, en ſuppoſant qu'ils ont même hauteur, & que la ligne conſtante des équations de leurs courbes génératrices, eſt la même pour toutes les trois.

8.

On peut auſſi démontrer de la même manière, que l'Ellipſoïde, le Paraboloïde & l'Hyperboloïde ſont en propotion continue arithmétique, lorſqu'ils ont même hauteur, & que les équations de leurs courbes génératrices, forment la proportion arithmétique continue que voici $\div \frac{bb}{aa}(ax - xx). \frac{bbx}{a}. \frac{bb}{aa}(ax + xx)$ c'eſt-à-dire, lorſque l'Ellypſe & l'Hyperbole ont les mêmes axes, & que le paramètre de la Parabole, eſt égal au paramètre de leur premier axe.

9.

Si l'on vouloit déterminer par les nombres quelle eſt la proportion continue arithmétique qui a lieu, entre ces trois ſolides, il faudroit déterminer les ſommes des ſuites infinies que repréſentent chaque terme de la proportion continue arithmétique $\div \frac{bb}{aa}(ax - xx)$.

$\frac{bbx}{a}$. $\frac{bb}{aa}(ax + xx)$ en ſubſtituant dans chacun de ces termes, pour x, ſucceſſivement la ſuite des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5.... &c. On peut auſſi remplir ce but, par le moyen du calcul intégral, qui eſt le moyen abrégé de trouver les ſommes des ſuites infinies, & c'eſt par ſon moyen que nous allons déterminer la proportion continue que nous cherchons.

10.

Prenons la formule * générale $\frac{cyydx}{2r}$, des tranches élémentaires d'un ſolide quelconque, puis tranſpoſant pour yy ſa valeur particulière priſe de l'équation de la courbe génératice, l'on aura les trois différentielles $\frac{bbc}{2aar}(ax - xx)\,dx$. $\frac{bbcx}{2ar}\,dx$. $\frac{bbc}{2aar}(ax + xx)dx$, ou ce qui eſt la même choſe, les différentielles ſuivantes, $\frac{bbc}{2aar}(axdx - xxdx)$. $\frac{bbcxdx}{2ar}$. $\frac{bbc}{2aar}(axdx + xxdx)$. leſquelles étant intégrées, donnent pour les ſolidités des trois corps, $\frac{bbc}{2aar}\left(\frac{axx}{2} - \frac{xxx}{3}\right)$. $\frac{bbcxx}{4ar}$. $\frac{bbc}{2aar}\left(\frac{axx}{2} + \frac{xxx}{3}\right)$. Or comme nous

* Voyez le Cours de Mathématiques à l'uſage des Gardes du Pavillon & de la Marine, par M. *Bézout*, *Tom.* 4. *pag.* 128.

voulons avoir les solidités de ces trois corps, en supposant que la hauteur de chacun d'eux, est égale au premier axe a, on doit substituer dans ces intégrales, pour x, la quantité a, par ce moyen, elles deviendront $\frac{bbc}{2aar} \times \frac{aaa}{6}$. $\frac{aabbc}{4ar}$. $\frac{bbc}{2aar} \times \frac{5aaa}{6}$. ou bien $\frac{abbc}{12r}$. $\frac{abbc}{4r}$. $\frac{5abbc}{12r}$, réduisant à la même dénomination la moyenne $\frac{abbc}{4r}$, en multipliant ses deux termes par 3, ces trois intégrales seront $\frac{abbc}{12r}$. $\frac{3abbc}{12r}$. $\frac{5abbc}{12r}$. Et comme elles ont un même dénominateur, leurs rélations sont celles de leurs numérateurs, qui forment entr'eux la proportion continue arithmétique $\div$ 1. 3. 5. Et comme ces intégrales sont les expressions des solidités de l'Ellysoïde, du Paraboloïde & de l'Hyperboloïde, donc, les solidités de ces trois corps, sont cette même proportion continue, ce qu'il falloit trouver.



MEMOIRE



MEMOIRE

SUR la meilleure forme que l'on peut donner à la chambre d'un Mortier, pour que la portée des Bombes ſoit la plus grande dont la charge eſt capable, ſans nuire aucunement à la durée de ces Bouches à feu.

CE que l'on nomme dans l'Artillerie *Chambre de Mortier*, eſt un eſpace vuide que l'on pratique dans le milieu de ſon fond, pour y placer la charge de poudre qui doit, par la force de ſa dilatation, choquer la Bombe; & lui imprimer une quantité de mouvement, qui la tranſporte à la diſtance qu'on ſe propoſe.

PUISQUE la force de la poudre enflammée eſt l'unique cauſe du choc, & que dans la nature les effets ſont toujours proportionels à leurs cauſes, plus une charge ſera conſidérable, plus auſſi ſon effet contre la bombe devra l'être, & il le ſera néceſſairement, ſi la quantité de poudre fait toujours ſon effort de la même manière, c'eſt-à-dire, ſi toutes les circonſtances, où la charge de poudre ſe trouve, ſont précisément les mêmes dans l'inſtant que l'effort eſt produit, car ſi quelqu'une de ces circonſtances varie, il eſt naturel que l'effet produit en reçoive quelque modification.

Toutes les épreuves que l'on a faites en différens Pays de l'Europe, concourent à prouver que les effets des charges placées dans des chambres différentes en ſont modifiés, elles ont de plus fait connoître, qu'une même quantité de poudre ſervant de charge à des Mortiers dont les chambres ont différentes formes, produit ſur la bombe des effets fort différens, quoique tout ſoit d'ailleurs parfaitement égal.

Il ſemble donc que l'expérience nous conduit à croire, que la poudre ne ſuit point la loi générale de la nature, qui veut que les effets ſoient toujours proportionels à leur cauſe. Mais il faut bien ſe donner garde d'embraſſer cette opinion, non parce qu'elle ruineroit la certitude phyſique, mais parce qu'elle eſt évidemment fauſſe dans le cas dont il s'agit, puiſqu'on a pris pour effet du tout, celui de l'une de ſes parties, & que d'ailleurs on n'a point vû toutes les cauſes particulières qui font varier les effets.

Ce que l'expérience nous montre à cet égard, ſe trouve confirmé par la théorie mathématique, laquelle nous fait connoître, que toutes ces variétés d'effet doivent néceſſairement avoir lieu. Car la poudre tient du ſouffre, du ſalpêtre, & du charbon dont elle eſt compoſée, une cauſe de variété dans ſes effets, parce que ces ingrédiens n'ont pas toujours le même dégré de perfection. Il lui en vient auſſi de ſa fabrication, parce qu'on la peut plus ou moins bien ouvrer. Ses effets varient encore par l'état où l'air ſe trouve lorſ-

qu'on l'enflamme, car il peut se trouver plus ou moins pésant, plus ou moins humide, & plus ou moins élastique. Ces différentes causes sont inévitables, tout ce qu'on doit faire à leur égard, c'est de les observer, pour tâcher de parvenir par un grand nombre d'observations de les pouvoir soumettre au calcul.

Ce ne sont pas là toutes les causes des variétés d'effet de la poudre sur les bombes, il en est encore une qui en produit beaucoup plus, c'est la forme de la chambre dans laquelle on enferme la charge *, par la raison que la poudre lors de son inflammation se dilate en tout sens, & par-là répand sa force de toute part contre tout ce qui l'environne, de manière qu'elle s'étend sur la surface totale de la chambre qui borne & retient l'effort qu'elle en reçoit. Et comme une force est toujours moindre dans ses parties à mesure que son effort est plus partagé, celui qui est produit sur une partie de la surface de la chambre sera donc d'autant plus grand, que la surface totale de la chambre sera moindre à l'égard de sa capacité, parce que dans ce cas l'effort sera moins partagé; & comme la variété de surface pour une même capacité est très-considérable comme cela est connu de tous les Géomètres, il s'ensuit que la forme de la chambre produit nécessairement de grandes variétés dans l'effort contre ses parois, mais comme la partie la plus

* Cela est prouvé par toutes les épreuves qui ont été faites, comme on le verra dans la suite de ce Mémoire, lorsque nous parlerons des différentes formes de chambres dont on a fait usage.

eſſentielle de la ſurface totale de la chambre, eſt celle de ſon cercle d'entrée, par lequel la charge choque la Bombe, ce mobile recevra néceſſairement un plus grand effort de la poudre enflammée, ſuivant que la ſurface totale de la chambre ſera moindre à l'égard de ſa capacité.

Ces raiſons étant de la plus grande évidence, nous conduiſent tout naturellement à conclure, que la poudre produira ſon plus grand choc poſſible contre la Bombe, lorſque la ſurface totale de la chambre ſera un minimum à l'égard de ſa capacité, & que la ſurface du cercle d'entrée ſera ſon maximum, en ſuppoſant que d'ailleurs rien n'arrête ou retarde l'effort de la poudre contre le mobile, dans l'inſtant de l'inflammation.

On voit clairement par ce que nous venons d'établir; que la détermination de la forme qui convient le mieux aux chambres des Mortiers, pour donner aux Bombes les plus longues portées, n'eſt point du tout arbitraire, & qu'on peut en cela, comme en toute autre choſe, faire le choix du meilleur, ce qu'il y a de ſingulier, c'eſt qu'on ne l'ait pas encore fait, mais comment le faire préſentement que nous en connoiſſons la néceſſité, & quels ſont les caractères diſtinctifs qui peuvent guider dans ce choix?

Ces caractères viennent d'être énoncés de manière à ne pouvoir point être ignorés ou méconnus, que la chambre du Mortier ait la moindre ſurface poſſible à l'égard de ſa capacité, eſt ſans contredit, le premier moyen par lequel la charge peut produire ſon plus grand effet contre la Bombe.

Mais pour que la force de la charge produiſe contre le mobile, le plus grand choc qu'il lui eſt poſſible, il faut encore qu'elle ait toute la liberté néceſſaire pour agir pleinement ſur lui. Il faut donc que la forme de la chambre n'ait rien qui retienne ou retarde l'action de la poudre enflammée, ainſi toute forme rentrante du côté de l'ouverture, doit par cette raiſon être exclue, & tout retreſſiſſement conique doit avoir le même ſort, parce que ces formes empêchent le fluide élaſtique de choquer la Bombe, dans toute l'étendue de ſa ſurface, relative à la capacité de la chambre.

Que l'on ſe garde bien de croire qu'en faiſant tout le contraire on feroit mieux, les extrêmes ſe touchent & ſont également mauvais, quoique ce ne ſoit pas de la même manière. Il ne faut donc point donner aux chambres des Mortiers les formes de Cone tronqué renverſé, de Paraboloïde, d'Hyperboloïde, &c. dont l'ouverture va en augmentant depuis le fond juſqu'à l'entrée. On a d'ailleurs deux bonnes raiſons pour rejetter ces formes-là, la première qui eſt en même-temps la plus forte, conſiſte en ce qu'elles n'ont pas la propriété d'avoir la moindre ſurface poſſible relativement à leur capacité; la ſeconde, en ce que ſi on coupe ces formes par tranches parallèles à l'entrée, les rapports entre les ſolidités de ces tranches & leurs ſurfaces environnantes varieront continuellement, (*comme il eſt aiſé à tout Géomètre de s'en convaincre*,) ce qui feroit cauſe que les parties de la ſurface de la chambre, ſouffriroient ſucceſſivement des

efforts croiſſans ou décroiſſans en allant de ſon fond à ſon entrée qui la détruiroit très-promptement.

Ainsi nous rejettons pour de bonnes raiſons, toutes les formes qui n'ont pas une égale groſſeur dans toutes leurs longueurs, par-conſéquent, il ne nous reſte plus pour faire notre choix, que le genre des Priſmes avec la forme unique de la ſphere.

Or parmi les Priſmes qui ont des baſes & des hauteurs égales, le Cylindre eſt certainement celui qui a la moindre ſuperficie poſſible à l'égard de ſa capacité, ainſi, il eſt dans ce genre de corps, l'unique qui puiſſe être mis en concurrence avec la ſphere. Mais il y a encore un choix à faire parmi les Cylindres, parce que le rapport de leur longueur à leur diamètre, fait varier le rapport de leur ſurface à leur ſolidité. Il y a donc un Cylindre qui eſt le meilleur poſſible, lequel eſt certainement celui qui a la moindre ſuperficie à l'égard de ſa ſolidité, & comme il eſt démontré que le Cylindre qui poſſéde cette propriété, a ſa longueur égale à ſon diamètre, donc le meilleur Cylindre pour ſervir de chambre aux Mortiers eſt celui qui eſt équilatere *.

Le choix ſe trouve donc de nouveau limité entre le Cylindre équilatére & la ſphere. Or on ſait que le dernier de ces deux ſolides, poſſéde la propriété d'avoir la forme unique parmi toutes les formes qui peuvent exiſter, qui a le moins de ſurface relative-

* On nomme ainſi tout Cylindre qui a ſa longueur égale au diamètre de ſa baſe.

ment à ſa ſolidité, ainſi il eſt de tous les corps celui qui doit avoir la préférence.

Ce que l'on doit d'abord obſerver, c'eſt que la forme entière de la ſphere ne peut point être employée à ſervir de chambre aux Mortiers, parce qu'elle n'a point d'ouverture par où elle puiſſe recevoir la charge, mais comme un de ſes ſegmens offre par ſon cercle de ſection cette ouverture, qui doit en même-temps ſervir d'entrée & de ſortie à la charge, il faut choiſir celui de tous les ſegmens, qui eſt par ſa nature le plus propre à remplir notre objet.

Tous les grands ſegmens de ſphere ne peuvent point ſervir de chambre aux Mortiers, par la raiſon que la partie excédente de la demi ſphere, étant néceſſairement rentrante du côté de l'ouverture, retiendroit au préjudice du Mortier, une partie de l'effort de la charge, ce qui contribueroit à la deſtruction de cette bouche à feu, en empêchant que le choc de la charge faſſe ſur la Bombe tout l'effet qu'elle eſt capable, ce qui ſeroit cauſe que le mobile recevant une impulſion moins forte, en iroit néceſſairement moins loin.

La forme de la demi ſphere n'ayant aucune de ſes parties rentrantes du côté du cercle de ſection, n'a point le défaut que nous venons de trouver aux grands ſegmens. Et comme ce corps poſſède éminemment la qualité d'avoir la moindre ſuperficie relativement à ſa ſolidité, ſa forme a donc les deux qualités eſſentielles pour être la meilleure forme poſſible que l'on peut donner à la chambre

d'un Mortier, parconſéquent on doit la préférer à toutes les autres formes.

Il ſe trouve cependant un inconvénient dans l'uſage de la demi ſphere, c'eſt qu'elle ne peut ſervir que pour les moyennes & les petites portées, car pour celles qui exigent une charge plus forte que de trois livres & demi de poudre, il n'eſt pas poſſible de s'en ſervir, parce qu'il lui faudroit un trop grand diamètre, le plus conſidérable qu'on puiſſe lui donner étant d'environ ſept pouces, ne lui procure cependant de capacité, que pour contenir environ $3\frac{1}{7}$ de livre péſant de poudre, charge aſſez conſidérable pour les portées des ſiéges de terre, mais qui ſe trouve ſouvent inſuffiſante pour l'attaque & la défenſe des Places maritimes.

Il nous faut donc avoir recours au Cylindre équilatére, comme étant le meilleur poſſible de ſon eſpèce après la demi ſphere, parce qu'il a l'avantage d'avoir une capacité triple de celle de la demi ſphere de même diamètre, lequel contiendra une charge trois fois plus conſidérable, ce qui approche de notre but, & on l'atteindra en faiſant une chambre compoſée de ce Cylindre & d'une demi ſphere de même diamètre pour ſon fond, car alors ſa capacité ſera d'environ $12\frac{1}{2}$ livres de poudre, charge ſuffiſante pour donner aux Bombes des portées plus longues que 2000 toiſes.

Me voilà parvenu au but que je m'étois propoſé, car il eſt clair par l'enchainement des vérités qui nous ont dirigé dans cette recher-

che ,

che, qu'il n'eſt pas poſſible de trouver de forme plus convenable pour ſervir de chambre aux Mortiers, que les deux que nous venons d'aſſigner. Il convient maintenant de faire connoître les défauts eſſentiels de celles qui leur ont été données juſqu'à préſent, afin que l'on puiſſe juger par comparaiſon, des avantages que l'on doit retirer de nos nouvelles formes.

La première forme de chambre de Mortier dont on s'eſt ſervi a été la Cylindrique, mais ce n'a pas été en vertu d'un choix, c'eſt uniquement parce qu'elle s'eſt préſentée d'elle-même, on l'auroit ſans doute perfectionnée dès ſon commencement, ſi l'on avoit fait attention que le rapport entre ſa longueur & ſon diamètre relativement à ſa capacité, doit néceſſairement influer ſur la force du choc que la bombe reçoit de la charge. Car l'inflammation ſe faiſant ſucceſſivement & de proche en proche, en commençant au fond de la chambre; il eſt conſtant, que plus elle aura de longueur à parcourir, plus auſſi le temps ſucceſſif de l'inflammation ſera long & lent, parce qu'il y aura moins de grains de poudre avoiſinés les uns aux autres, que ſi elle avoit la moindre longueur poſſible à l'égard de ſon diamètre & de ſa capacité; or la lenteur de l'inflammation diminue néceſſairement la force du choc de la poudre enflammée, parce qu'elle ne peut être conſidérable qu'à proportion de la viteſſe de dilatation qui conſtitue ſon eſſence. On auroit donc été conduit à chercher les meilleures dimenſions poſſibles qu'il convient de lui donner, tout comme nous l'avons fait, & l'on ſe ſeroit fixé par

les mêmes raisons que nous, au Cylindre qui a sa profondeur égale à son diamètre, mais comme on n'a point donné aux chambres Cylindriques ce dégré de perfection, il est par-là évident qu'on n'a point poussé les réfléxions aussi loin & aussi utilement que je l'ai fait.

Des Géomètres s'étant apperçus que la forme de la chambre devoit beaucoup contribuer à la force du choc de la charge contre la Bombe, réfléchirent sur la forme qui pourroit être la plus convenable, leur science les conduisit tout naturellement à la forme sphérique, par la raison, dirent-ils, que dans cette forme, la poudre étant plus ramassée autour de la lumière, le feu se porte plus facilement vers toutes les parties de la poudre pour l'enflammer à la ronde presque dans un instant. Cette raison étoit bonne, mais l'exécution n'y répondit pas, on gâta ce que cette idée presentoit de bien utile, en ne combinant pas, comme nous l'avons fait, de quel segment de sphere il convenoit de se servir, on fit usage de l'un des grands segmens dont la partie rentrante de sa superficie qui environne l'entrée, retenoit une quantité considérable de l'effort de la charge, en privoit la Bombe, & le faisant rebondir sur son fond, y formoit un enfoncement ou creux; ces efforts superflus à la chambre, & nécessaires à la Bombe qui s'en trouvoit privée, tourmentoient très-violemment le Mortier, son affut & la plateforme sur lesquels il pose, au point que la durée du Mortier devenoit très-courte, & que la direction qu'on lui donne pour atteindre le but., en étoit

totalement dérangée: Il eſt cependant vrai, que malgré ces deux inconvéniens, ſes bonnes qualités produiſoient une partie de leurs effets, car elles pouſſoient les Bombes preſque le double plus loin que les chambres cylindriques; après cela, que ne doit-on pas attendre de notre chambre compoſée d'une demi ſphere & d'un Cylindre équilatére, qui poſſéde toutes les bonnes qualités de la chambre ſphérique, ſans avoir aucun de ſes défauts.

L'EXPERIENCE ayant forcé de renoncer à la chambre ſphérique, on s'imagina de la corriger par une légere modification qui fut de changer la courbure rentrante qui environne l'entrée, & de-là nâquit la chambre Poire dont le fond eſt à peu-près une demi ſphere, mais dont la partie du côté de l'ouverture eſt auſſi une courbe rentrante, plus douce que celle de la demi ſphere. Les épreuves réitérées que l'on a faites de cette chambre ont fait connoître qu'elle a les mêmes qualités & les mêmes défauts que la chambre ſphérique, à peu de choſe près, enſorte qu'elle pouſſe les Bombes très-loin, mais que par contre ſa durée eſt très-courte, ce qui vient certainement de la partie retrécie & rentrante de ſa ſurface du côté de ſon ouverture, qui embraſſant une certaine quantité du fluide élaſtique de la poudre enflammée, en retient & reçoit tout l'effort, au grand préjudice de la Bombe à laquelle il eſt deſtiné, & de la bouche à feu qu'il détruit en très-peu de temps.

LA quatriéme chambre que l'on a imaginé, puis miſe à l'épreuve, eſt celle qui a la forme de Cone tronqué, dont la grande

base servoit d'entrée, & la petite base de fond, mais elle n'a point fait fortune, à cause de ses défauts naturels qui sont, 1°. d'avoir beaucoup de surface à l'égard de sa capacité, 2°. de donner à la charge une inflammation successive trop lente, 3°. que les efforts de la poudre enflammée sont différens dans les différentes parties de sasur face.

Puisque nos deux formes de chambre sont les meilleures possibles, leurs charges produiront nécessairement leur plus grand effet; on pourra donc par leur moyen jetter les Bombes aussi loin qu'à l'ordinaire avec moins de poudre, ce qui contribuera beaucoup à la conservation du Mortier, car il est de nécessité absolue, que la quantité de poudre d'épargne ne faisant point son effort sur la Bombe, le fasse nécessairement contre les parois de la chambre; ce qui ne peut contribuer qu'à détruire cette bouche à feu. Ainsi cette épargne est une double économie, dont la dernière est la plus importante, à cause des circonstances dans lesquelles elle a lieu.

Une autre circonstance qui occasionne le dépérissement des Mortiers, tout aussi promptement que l'effort de la poudre contre les parois de la chambre, est le choc de la Bombe contre la partie de son logement sur laquelle elle pose, & souvent contre différens endroits de la longueur de l'ame. La cause de ces chocs vient de ce que la charge ne prend pas la Bombe dans la direction de son axe, parce que le Mortier étant incliné, la Bombe pose nécessairement sur la partie inférieure de son logement, ce qui fait que la partie supérieure de ce mobile, laisse un intervalle entre lui & le Mortier double du vent, ce qui abaisse son axe au-dessous de celui

de la chambre, précisément de la distance du vent, ainsi, la charge enflammée dans la chambre ne choque pas la bombe suivant la direction de son axe, mais un peu obliquement. Or on sait que tout choc oblique à une sphere, lui donne une direction oblique à son axe, ainsi ce choc pousse nécessairement la Bombe contre la partie inférieure de l'ame du Mortier. Pour éviter cet inconvénient, il faut baisser l'axe de la chambre, précisément de la longueur du vent que l'on donne à la Bombe, par ce moyen le mobile sera choqué directement selon son axe. Et comme nos deux chambres embrasseront par leur cercle d'entrée, la plus grande partie possible de la bombe rélativement à la charge, celle-ci par la force de sa dilatation, enlevera plus directement le mobile, ce qui rendra presqu'insensible l'effet de la différence de poids entre l'hémisphère supérieur de la Bombe & son inférieur.

Dans la pratique du Bombardement, on forme les charges pour un même Mortier de différentes quantités de poudre, afin de jetter les Bombes aux différentes distances dont on a besoin; la variété de ces charges a pour but l'épargne de la poudre, car on sait bien que l'on peut jetter les Bombes à telle distance que l'on veut, avec une même charge, en donnant au Mortier les dégrés d'élévation qu'il convient. Mais en se servant de nos deux chambres, l'économie de la poudre sera très-peu de chose en comparaison de la conservation du Mortier, qui est de très-grande conséquence dans les siéges. Il paroit donc très-convenable tant pour le bien du

ſervice que pour l'économie, de tirer les Bombes à chambre pleine, par ce moyen toutes les parties de ſa ſurface recevront continuellement la même quantité d'effort à très-peu de choſe près, elle ſera donc également comprimée en tout ſens, ce qui eſt abſolument néceſſaire pour la conſervation de ſa forme, & par-là même de ſa durée. Si l'on adopte cette méthode, il ſera néceſſaire de former des tables pour aſſigner les dégrés d'élévation qu'il faut donner au Mortier, pour jetter les Bombes aux diſtances que l'on ſe propoſe ; ces tables pour une charge conſtante ſont très-faciles à faire, elles ſont une ſuite naturelle de quelques propoſitions de Géométrie, généralement connues, ainſi il eſt inutile que nous entrions dans les détails ſur la manière de les conſtruire.

CONCLUSION.

J'ai par des raiſons phyſiques & géométriques, que perſonne ne peut revoquer en doute : déterminé les deux formes qui conviennent le mieux aux chambres des Mortiers, pour que leurs charges produiſent les plus longues portées poſſibles, ſans nuire à la durée de cette bouche à feu, mais qui tendent au contraire à ſa conſervation. Nous avons de plus fait connoître les deux autres inconvéniens qui la détruiſent, avec les moyens de les éviter. Si j'ai erré dans cette recherche, je déſire que les perſonnes éclairées me faſſent voir en quoi, par des bonnes raiſons, étant prêt à me rendre à tout ce qui porte le caractère de la vérité.

NB. J'ai compoſé ce Memoire en l'année 1766.

FIN.



APPROBATION.

Lû & approuvé. l'Abbé DE LA CHAPELLE, *à Paris, le 12. Juin 1769.*

PRIVILÉGE GÉNÉRAL.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres, nos Justiciers qu'il appartiendra: SALUT, notre amé le Sr. MARSSON Nous a fait exposer qu'il desireroit faire imprimer & donner au public: un ouvrage intitulé: *les trois Corps d'Essai Géométriques*, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer ledit ouvrage autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de six années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. FAISONS défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance: comme aussi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit ouvrage, ni d'en faire aucun extrait sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, des trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommage & intérêts, A LA CHARGE que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression dudit ouvrage sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en beau papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du dix Avril mil sept cent vingt-cinq, à peine de déchéance du présent Privilége; qu'avant de l'exposer en vente, le manuscrit qui aura servi de copie à l'impression dudit ouvrage, sera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très cher & féal Chevalier, Chancelier Garde des Sceaux de France,

le Sieur DE MAUPEOU; qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle dudit Sieur DE MAUPEOU: le tout à peine de nullité des Présentes; DU CONTENU desquelles vous MANDONS & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. VOULONS que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin dudit ouvrage, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers, Secrétaires, foi soit ajoûtée comme à l'original. COMMANDONS au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécusion d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de haro, charte normande & lettres à ce contraires; Car tel est notre plaisir. DONNÉ à Compiègne le Mercredi deuxième jour du mois d'Aoust, l'an de grace mil sept cent soixante neuf, & de notre Régne le cinquante quatrième.

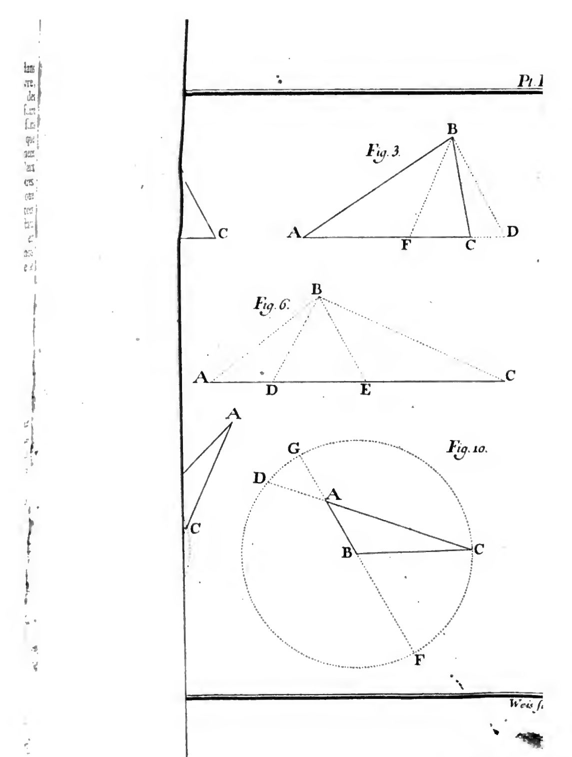
PAR LE ROI EN SON CONSEIL,

LEBEGUE.

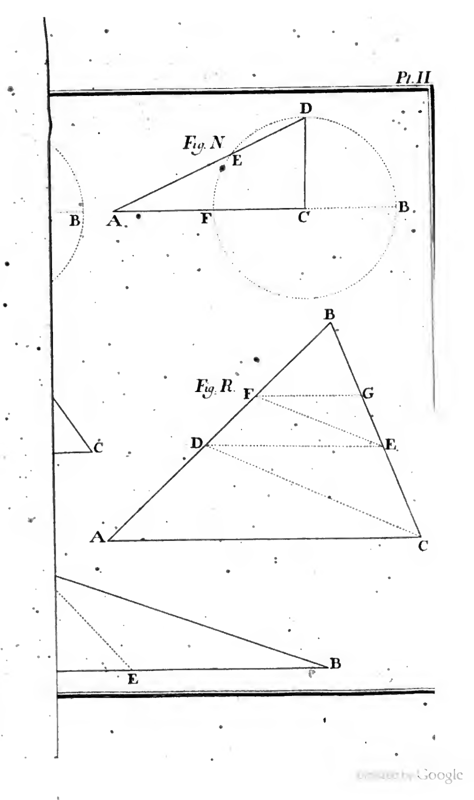
Regiſtré sur le Regiſtre XVIII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libr. & Impr. de Paris, No. 682. folio 46. conformément au réglement de 1723, qui fait défenses art. 41. à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, autres que les Lib. & Imp. de vendre débiter, faire afficher aucuns libres pour les vendre en leurs noms, soit qu'ils s'en disent les auteurs vû autrement, & à la charge de fournir à la susdite Chambre neuf Exemplaires prêscrits pour l'article 108. du même réglement. A Paris ce 15. Novembre 1769.

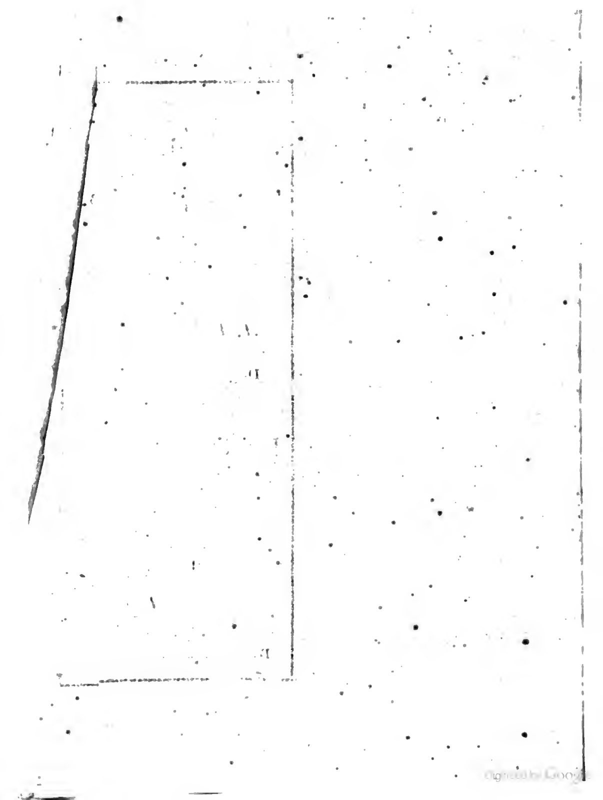
BRIASSON, Sindic.

à Strasbourg de l'Imprimerie de JONAS LORENZ.



Pl. I
Fig. 3.
B
A
F
C
D
C
Fig. 6.
B
A
D
E
C
A
C
Fig. 10.
G
D
A
B
C
F
Weis f.


Fig. N
D
E
B
A
F
C
B
B
Fig. R
F
G
D
E
C
A
C
B
E



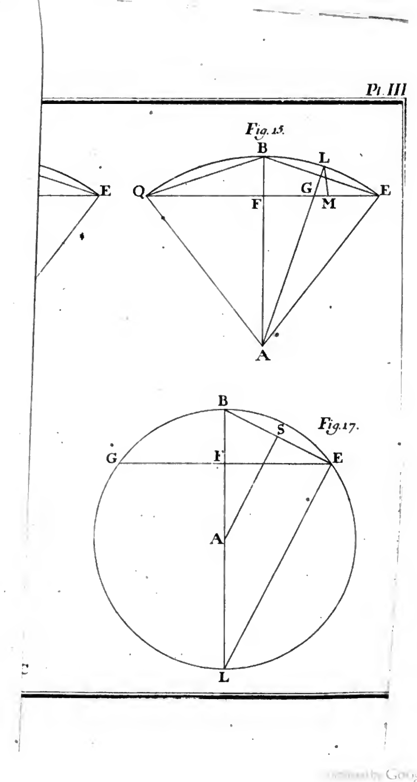

Fig. 15.
B
L
Q
G
E
F
M
A
B
Fig. 17.
S
G
F
E
A
L

Fig. 21.

B
E
L M
D
F G
C
A

D
C

